Algèbre et Arithmétique Effectives — 18/11/25
Cours 10

Homomorphismes (morphismes) d'anneaux

Déf : Soient $(A,+,\cdot)$ et $(B,+,\cdot)$ deux anneaux. Une application

$$\varphi : A \to B$$

est un homomorphisme d'anneaux si :

1) $\forall\, a,b \in A, \quad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
2) $\forall\, a,b \in A, \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
3) $\varphi(1_A) = 1_B$.

L'image de φ est $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) : a \in A\}$ et le noyau de φ est $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in A : \varphi(a) = 0_B\}$.

Un isomorphisme d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux bijectif.

Si $\varphi : A \to B$ est un isomorphisme d'anneaux, alors A et B sont dit isomorphes (en tant qu'anneaux).

Remarque : Si $\varphi : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, alors φ est aussi un homom. de groupes additifs $\Rightarrow \varphi(0_A) = 0_B$.

Rappel : Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau. Un sous-ensemble $I \subseteq A$ est un idéal si :

- $(I,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$
- $\forall\, a \in A, \forall\, x \in I, \quad ax \in I$.

Proposition : Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

Alors :

1) Si I est un idéal de A, alors $\varphi(I)$ est un idéal de $\varphi(A) = \mathrm{Im}(A)$.

2) Si J est un idéal de $\varphi(A)$, alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A.

$\quad \overset{\shortparallel}{\{a \in A : \varphi(a) \in J\}}$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0_B\})$ est un idéal de A.

Remarque : $(\overset{\subseteq B}{\varphi(A)}, +, \cdot)$ est un anneau. (sous-anneau de B)

Montrons d'abord que $\varphi(A)$ est fermé par rapport à $+$ et $\cdot$:

Soient $x, y \in \varphi(A) \Rightarrow \exists\ a, b \in A$ t.q $x = \varphi(a)$, $y = \varphi(b)$. Donc

- $x + y = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a+b) \in \varphi(A)$
- $xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(A)$

Montrons maintenant que $(\varphi(A), +)$ est un sous-groupe de $(B, +)$.

Soient $x, y \in \varphi(A)$ et $a, b \in A$ t.q. $\varphi(a) = x$ $\varphi(b) = y$. Alors on a :

$$x - y = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a-b) \in \varphi(A).$$

De plus $1_B \in \varphi(A)$, car $\varphi(1_A) = 1_B$.

Tous les autres propriétés découlent du fait que $\varphi(A) \subseteq B$ et B est un anneau.

Dém

On démontre juste (1). On laisse (2) par exercice.

Soit I un idéal de A. On veut montrer que $\varphi(I) = \{\varphi(x) : x \in I\}$ est un idéal de $\varphi(A)$.

- $(\varphi(I), +)$ est un sous-groupe de $(\varphi(A), +)$, car φ est aussi un homomorphisme de groupes additifs et $\varphi(I) \subseteq \varphi(A)$.

- Soit $y \in \varphi(I)$ et soit $b \in \varphi(A)$. Alors $\exists x \in I$, $a \in A$ t.q. $y = \varphi(x)$ et $b = \varphi(a)$. Donc on a :

$$yb = \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(\underbrace{xa}_{\in I,\text{ car } I \text{ est un idéal}}) \in \varphi(I).$$

__Proposition__ : Soit $\varphi : A \to B$ un __isomorphisme__ d'anneaux. Alors :

(1) $a \in A$ est un diviseur de $0 \iff \varphi(a)$ est un diviseur de 0.

(2) $a \in A$ est inversible $\iff \varphi(a) \in B$ est inversible.

(3) φ induit un isomorphisme (de groupes) $A^\times \to B^\times$ entre les groupes des inversibles de A et B.

__Dém__

(1) $\Rightarrow$) Soit $a \in A \setminus \{0\}$ un diviseur de zéro $\Rightarrow \exists\, b \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $ab = 0_A \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(0_A) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(a)\varphi(b) = 0_B$

Puisque φ est bijective et $a, b \neq 0_A$ alors $\varphi(a) \neq 0_B$ et $\varphi(b) \neq 0_B$.

Donc $\varphi(a)$ est un diviseur de zéro.

$\Leftarrow$) Par exercice.

(2) $\Rightarrow$) Soit $a \in A$ un élément inversible $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, b \in A$ t.q. $ab = 1_A \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(1_A)$
$\Rightarrow \varphi(a)\varphi(b) = 1_B \Rightarrow \varphi(a)$ est inversible et son inverse est $\varphi(b) = \varphi(a^{-1})$.

$\Leftarrow$) Par exercice

(3) On considère l'application :

$$\hat{\varphi} : A^\times \longrightarrow B^\times$$
$$a \longmapsto \varphi(a)$$

On veut montrer que $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme de groupes.

- $\hat{\varphi}$ est bien définie, car si $a \in A^\times \overset{(2)}{\Rightarrow} \varphi(a) \in B^\times$
- $\hat{\varphi}$ est bijective : c'est une conséquence de (2) et du fait que φ est bijective.
- $\forall\, a,b \in A^\times$, $\hat{\varphi}(ab) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{\varphi}(a)\hat{\varphi}(b)$

<u>Théorème</u> (Premier théorème d'isomorphisme)
Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.
Alors

$$\frac{A}{\mathrm{Ker}(\varphi)} \simeq \mathrm{Im}(\varphi) \quad \text{(en tant qu'anneaux)}$$

via l'isomorphisme

$$\hat{\varphi} : \frac{A}{\mathrm{Ker}(\varphi)} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$$
$$[a]_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \longmapsto \varphi(a).$$