Exam - Session 1

10/12/24

Consignes. *L'examen dure 2h. Il est constitué de quatre exercices indépendants. Toute question non résolue peut être admise dans la suite. Les réponses doivent être correctement justifiées et rédigées. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.*

Exercice 1.

(a) Définir ce qu'est un groupe.

(b) On considère l'ensemble :

$$G = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

et l'opération ordinaire de multiplication $\cdot$ sur G. Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe commutatif.

(c) Soit H le sous-ensemble de G défini par

$$H = \{2^{2h+1} : h \in \mathbb{Z}\}.$$

Est-ce que H est un sous-groupe de G ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2. Soit $G = \left(\frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}\right)^\times$ le groupe des inversibles de $\frac{\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}$.

(a) Déterminer un ensemble minimal de générateurs de G. Le groupe G, est-il cyclique ?

(b) Si H est un sous-groupe de G, quels sont les ordres possibles de H ? Déterminer ensuite tous les sous-groupes de G.

(c) Montrer que G est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, en construisant explicitement un isomorphisme.

Exercice 3. On considère le système d'équations suivant à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$.

$$\begin{cases} y + z = 10 \\ 7x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y + az = 1. \end{cases}$$

où $a \in \frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$ est un paramètre.

(a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système est compatible.

(b) Pour $a = 1$, résoudre le système sur $\frac{\mathbb{Z}}{11\mathbb{Z}}$.

Exercice 4. On considère l'ensemble

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$$

(a) Montrer que $\mathcal{X}$, avec les opérations classiques d'addition et multiplication de matrices, est un anneau commutatif.

(b) Est-ce que $\mathcal{X}$ est un corps ? Justifiez votre réponse.

(c) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{X} & \to & \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \\ & \begin{pmatrix} a & 2b \\ 2b & a \end{pmatrix} & \mapsto & [a]_4 \end{array}$$

est un homomorphisme d'anneaux.

(d) Déterminer le noyau et l'image de φ et appliquer le premier théorème d'isomorphisme d'anneaux.

(e) Montrer que $\ker(\varphi)$ est un *idéal principal*, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \ker(\varphi)$ telle que $\ker(\varphi) = A\mathcal{X}$, où $A\mathcal{X} = \{AB : B \in \mathcal{X}\}$.