TD 6

Morphismes de Groupes et Anneaux

Exercice 1. Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes $\left(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +\right)$ et $\left(\left(\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}\right)^{\times}, \cdot\right)$? Si oui, donnez un tel isomorphisme explicitement. Sinon, expliquez pourquoi un isomorphisme ne peut pas exister.

Exercice 2. Soit $(GL_2(\mathbb{R}, \cdot)$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre 2 à coefficients réels.

(a) Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & (GL_2(\mathbb{R}), \cdot) & \to & (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \\ & A & \mapsto & \det(A). \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes.

(b) Déterminer le noyau et l'image de φ et appliquer le premier théorème d'isomorphisme.

(c) Déterminer lesquels parmi ces sous-ensembles sont des sous-groupes de $GL_2(\mathbb{R})$:

i) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$

ii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$

iii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$

(d) Montrer que H_1 est isomorphe à $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Exercice 3. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des autormorphismes de G.

(a) Montrer que si $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$, alors $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.

(b) Montrer que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un groupe, dont on déterminera l'élément neutre et l'inverse pour chaque élément.

Exercice 4. Soit $(G, \cdot)$ un groupe et soit $g \in G$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_g\colon & G & \to & G \\ & x & \mapsto & gxg^{-1}. \end{array}$$

(a) Montrer que, pour tout $g \in G$, φ_g est un homomorphisme de groupes.

(b) Montrer que φ_g est un automorphisme de G.

(c) On considère maintenant l'application :

$$f\colon \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \mapsto & \varphi_g. \end{array}$$

Montrer que g est un homomorphisme de groupes.

(d) Montrer que si G est commutatif, alors $\varphi_g = \mathrm{id}_G$, pour tout $g \in G$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ est un anneau avec les opérations classiques d'addition et multiplication dans $\mathbb{R}$.

(b) On considère la fonction

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] & \to & \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ a + b\sqrt{2} & \mapsto & a - b\sqrt{2} \end{array}$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ d'ordre 2.

(c) Pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x \cdot f(x)$. Montrer que pour tout x, $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(x) \in \mathbb{Z}$ et $N(xy) = N(x)N(y)$.

(d) Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$. Donner des exemples d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 6. Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $\mathbb{Q}^{(m)}$ l'ensemble des nombres rationnels a/b où $\mathrm{PGCD}(b, m) = 1$.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}^{(m)}$ est un anneau, inclus dans $\mathbb{Q}$.

(b) Caractériser les inversibles de $\mathbb{Q}^{(m)}$.

(c) On définit $\Phi : \mathbb{Q}^{(m)} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ par $\Phi(a/b) = [a]_m[b]_m^{-1}$.

  i. Montrer que Φ est bien définie, *c'est-à-dire que si* $a/b = c/d$, *alors* $[a]_m[b]_m^{-1} = [c]_m[d]_m^{-1}$.

  ii. Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.

  iii. Calculer l'image et le noyau de Φ.