

## TD 3

ENTIERS MODULO  $n$  ET CONGRUENCES LINÉAIRES

**Esercice 1.** Soit  $a, b, n, n' \in \mathbb{Z}$ , avec  $n, n' > 0$  et  $n' \mid n$ . Montrer que si  $a \equiv b \pmod{n}$ , alors  $a \equiv b \pmod{n'}$ .

**Esercice 2.** Lister les éléments de l'ensemble  $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$  et pour chacun de ces éléments déterminer son inverse modulo 20.

**Esercice 3.** Déterminer si 46 est inversible modulo 651 et, en cas affirmatif, calculer son inverse.

**Esercice 4.** Démontrer que si  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  n'est pas premier alors  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  n'est pas un corps.

**Esercice 5.**

(a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les congruences suivantes :

- $21z \equiv 12 \pmod{30}$ ,
- $14z \equiv 5 \pmod{21}$ ,
- $15z \equiv 9 \pmod{25}$ ,
- $z + 4 \equiv 16z + 13 \pmod{18}$ .

(b) Quelle âge ai-je? La réponse dans le représentant canonique des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} z \equiv 2 \pmod{3} \\ z \equiv 3 \pmod{4} \\ z \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} .$$

(c) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5z \equiv 2 \pmod{3} \\ 3z \equiv 4 \pmod{7} \\ 3z \equiv 7 \pmod{8} \end{cases} , \quad \begin{cases} 6z \equiv 9 \pmod{15} \\ 22z \equiv 55 \pmod{77} \\ 3z \equiv 2 \pmod{13} \\ 27z \equiv 9 \pmod{36} \end{cases} .$$

**Esercice 6.** Déterminer un couple d'entiers  $a, b$  tels que la congruence linéaire

$$az \equiv b \pmod{319}$$

a exactement 11 solutions distinctes modulo 319.

**Esercice 7.** Montrer qu'il n'existe pas d'entiers  $x, y$  qui satisfont l'équation

$$7x^3 + 2 = y^3.$$