TD 2

Nombres premiers, Relations d'équivalence

Esercizio 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que n est premier si et seulement si n n'admet aucun diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Esercizio 2. Démontrer le théorème d'Euclide :

Il existe une infinité de nombres premiers.

Indice : Supposer par l'absurde qu'il existe un nombre fini de nombres premiers, $p_1, \ldots, p_k$, et considérer le produit $p_1 \cdots p_k + 1$.

Esercizio 3.

1) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Indice : Supposer par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que pgcd$(a, b) = 1$.
2) Montrer avec un argument similaire que, pour tout nombre premier p, le nombre $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.

Esercizio 4. On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation suivante : soient $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \sim b \Leftrightarrow |a - b| \leq 2.$$

Est-ce que $\sim$ est une relation d'équivalence ? Si oui, décrire pour tout $a \in \mathbb{Z}$ la classe d'équivalence $[a]$ de a et l'ensemble $\mathbb{Z}/\sim$.

Esercizio 5. On considère sur $\mathbb{R}$ la relation suivante : soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2.$$

Est-ce que $\sim$ est une relation d'équivalence ? Si oui, décrire pour tout $x \in \mathbb{R}$ la classe d'équivalence $[x]$ de x et l'ensemble $\mathbb{R}/\sim$.

Esercizio 6. Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. On considère sur $\mathbb{Z}$ la relation suivante : soient $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \sim_n b \Leftrightarrow n \mid (a - b).$$

1) Montrer que $\sim_n$ est une relation d'équivalence.
2) Décrire les classes d'équivalences de 0, 1 et n, c'est-à-dire :

$$[0]_n := \{a \in \mathbb{Z} : a \sim_n 0\},$$
$$[1]_n := \{a \in \mathbb{Z} : a \sim_n 1\},$$
$$[n]_n := \{a \in \mathbb{Z} : a \sim_n n\}.$$