

TD 1

DIVISIBILITÉ, PGCD ET ALGORITHMES D'EUCLIDE

Exercice 1. Pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}$, montrer que :

- 1) $a \mid b$ et $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$ and $a \mid (b - c)$.
- 2) $a \mid b$ et $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.
- 3) $a \mid b$ et $b \mid a \Rightarrow a \pm b$.

Esercizio 2. En appliquant l'algorithme d'Euclide étendu, calculer le pgcd et le couple (u, v) de l'identité de Bézout pour les couples de nombres suivants :

- 1) 13 et 21 ;
- 2) 2926 et 2046.

Esercizio 3. Soient a, b, c des entiers non nuls avec $c > 0$. Montrer que :

- 1) $\text{pgcd}(ac, bc) = c \text{pgcd}(a, b)$;
- 2) si $\text{pgcd}(a, b) = d$ alors les entiers $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

Esercizio 4. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, et soit $d = \text{pgcd}(a, b)$.

- 1) Montrer que s'il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $as + bt = r$, alors $d \mid r$.
- 2) Montrer que si (u, v) forment une paire d'entiers satisfaisant l'identité de Bézout $d = au + bv$, alors $\text{pgcd}(u, v) = 1$.

Esercizio 5. Soit a et b deux entiers et d leur pgcd. *Par simplicité, on suppose a et b strictement positifs.*

1. Montrer qu'il existe une infinité de couples de coefficients de Bézout (u, v) tels que $au + bv = d$.
[Indice : Ajouter et retrancher ab au membre de gauche de l'équation.]
2. Soit (u, v) des coefficients de Bézout associés à a et b . Montrer qu'un couple (u', v') satisfait $au' + bv' = d$ si et seulement s'il existe k tel que $u' = u + k\frac{b}{d}$ et $v' = v - k\frac{a}{d}$.
3. Montrer qu'il existe exactement deux couples de coefficients de Bézout tels que $|u| \leq \frac{b}{d}$ et $|v| \leq \frac{a}{d}$.

Esercizio 6. Soient $a, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\text{pgcd}(a, b_1 b_2 \cdots b_k) = 1$ si et seulement si $\text{pgcd}(a, b_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, k$.