LEZIONE 17 - GEOMETRIA e ALGEBRA

10/05/22

Nella lezione precedente abbiamo definito un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare.

Per comodità richiamiamo queste definizioni qui di seguito.

<u>Def</u>: Siano V e W due spazi vettoriali su K. Una funzione $f: V \to W$ si dice un'applicazione lineare se:

$$\forall \lambda, \mu \in K, \ \forall v_1, v_2 \in V, \quad f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2).$$

Il sottospazio di V

$$\mathrm{Ker}(f) := \{ v \in V : f(v) = 0_W \}$$

è detto NUCLEO di f.

Il sottospazio di W

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{ f(v) : v \in V \}$$

è detto IMMAGINE di f. La dimensione dell'immagine di f è detta RANGO di f e si denota $rg(f)$.

<u>Proposizione</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora

$$f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

<u>Dim</u>

$$f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \{ f(v) : v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \} \overset{\langle v_1,\dots,v_n\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K\}}{=} \{ f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \} =$$

$$\underset{f \text{ lineare}}{=} \{ \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \} = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

<u>Osservazione</u>: Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ e quindi, per la proposizione precedente,

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle.$$

Ne segue che l'immagine di f è generata dalle immagini degli elementi di una qualsiasi base di V. Quindi:

$$rg(f) \le \dim(V).$$

Vediamo che per ogni applicazione lineare $f: V \to W$, con $\dim(V) < \infty$, la differenza $\dim(V) - rg(f)$ è proprio uguale alla dimensione del nucleo di f. Abbiamo infatti il risultato seguente:

Teorema del rango ("nullità più rango")

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$\underbrace{\dim(Ker(f))}_{\text{NULLITÀ}} + \underbrace{rg(f)}_{\text{RANGO}} = \dim(V).$$

Idea della dim

Sia $\dim(V) = n$.

Si noti innanzitutto che $Ker(f)$ ha dimensione finita in quanto sottospazio di V. Sia quindi $\{v_1, \dots, v_p\}$ una base di $Ker(f)$.
Possiamo completare $\{v_1, \dots, v_p\}$ a una base di V: siano dunque $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tali che $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ sia una base di V.

La dimostrazione si conclude mostrando che $\{f(v_{p+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $Im(f)$, da cui si ottiene

$$\underbrace{\dim(Im(f))}_{= rg(f)} = n - p = \dim(V) - \dim(Ker(f)).$$

Osservazione: si noti che nell'enunciato del teorema del rango non si è supposto che W è di dimensione finita.

Proposizione: Siano $f: V \to W$ e $g: W \to U$ due applicazioni lineari di spazi vettoriali.
Allora la composizione:

$$g \circ f: V \longrightarrow U$$
$$v \longmapsto (g \circ f)(v) := g(f(v))$$

è un'applicazione lineare.

Dim: per esercizio.

Esempio

Consideriamo le seguenti applicazioni lineari

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad e \qquad\qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+z, 2x+y) \qquad\qquad\qquad (x,y) \longmapsto x+3y$$

Chiaramente $f \circ g$ non è definita, poiché il codominio di g non coincide con il dominio di f.

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo:

$$(g \circ f)(x,y,z) = g\big(f(x,y,z)\big) = g(x+z,\ 2x+y) = (x+z) + 3(2x+y) =$$
$$= 7x + 3y + z.$$

Quindi $g \circ f$ è l'applicazione lineare

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto 7x+3y+z.$$

Richiamiamo ora alcune definizioni, viste nella prima lezione, che adattiamo ora al contesto delle applicazioni lineari.

<u>Def</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali.

- f è detta SURIETTIVA se $f(V) = W$, ossia se

$$\forall\ w \in W,\ \exists\ v \in V \text{ tale che } f(v) = w.$$

Chiaramente f è suriettiva se e solo se $rg(f) = \dim(W)$.

- f è detta INIETTIVA se $\forall\ v_1, v_2 \in V$

$$f(v_1) = f(v_2) \implies v_1 = v_2.$$

- f è detta un ISOMORFISMO se f è BIETTIVA, ossia se f è iniettiva e suriettiva.

Se f è un isomorfismo allora esiste

$$f^{-1} : W \to V$$

tale che:

$$\forall\ x \in W,\ f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

La funzione f^{-1} è detta FUNZIONE INVERSA di f e verifica le seguenti uguaglianze di funzioni:

$$f \circ f^{-1} = id_W, \text{ ossia } \forall\ w \in W,\ f\big(f^{-1}(w)\big) = w$$
$$f^{-1} \circ f = id_V, \text{ ossia } \forall\ v \in V,\ f^{-1}\big(f(v)\big) = v.$$

<u>Proposizione</u>: Sia $f: V \to W$ un isomorfismo. Allora f^{-1} è un'applicazione lineare biettiva, ossia un isomorfismo.

Dim

La funzione $f^{-1}: W \to V$ è chiaramente biettiva. Mostriamo che f^{-1} è un'applicazione lineare.

Siano $w_1, w_2 \in W$ e siano $\lambda, \mu \in K$.
Allora $\exists$ $v_1, v_2 \in V$ tali che $\underbrace{f(v_1) = w_1}_{\Updownarrow \; v_1 = f^{-1}(w_1)}$ e $\underbrace{f(v_2) = w_2}_{\Updownarrow \; v_2 = f^{-1}(w_2)}$.

Quindi abbiamo:

$$f^{-1}(\lambda w_1 + \mu w_2) = f^{-1}\left(\lambda f(v_1) + \mu f(v_2)\right) = f^{-1}\left(f(\lambda v_1 + \mu v_2)\right) = \lambda v_1 + \mu v_2 = \lambda f^{-1}(w_1) + \mu f^{-1}(w_2),$$

ossia f^{-1} è un'applicazione lineare e quindi un isomorfismo.

Esempio

Consideriamo l'applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y).$$

Mostriamo che f è un isomorfismo e determiniamone l'inversa.

- **INIETTIVITÀ**

  Siano $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tali che

  $$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

  $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow v_1 = v_2.$$

  Quindi f è iniettiva.

- **SURIETTIVITÀ**

  $$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{R}^2) = f(\langle (1,0), (0,1) \rangle) = \langle f(1,0), f(0,1) \rangle = \langle (1,1), (1,-1) = \mathbb{R}^2.$$

  Quindi f è suriettiva.

Ne segue che f è un isomorfismo ed esiste quindi un isomorfismo inverso $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

$$\forall \; (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad f^{-1}(x', y') = (x, y) \Leftrightarrow f(x, y) = (x', y').$$

Abbiamo:

$$f(x,y) = (x', y') \Leftrightarrow (x+y, x-y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{2} \\ y = \dfrac{x' - y'}{2} \end{cases}$$

risolto il sistema nelle incognite x' e y'

Quindi l'isomorfismo inverso è definito da:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right).$$

Si può facilmente verificare che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$f(f^{-1}(x,y)) = (x,y) \quad e \quad f^{-1}(f(x,y)) = (x,y).$$

Nel caso delle applicazioni lineari è possibile determinare l'iniettività di una funzione semplicemente calcolando il nucleo. Infatti abbiamo il risultato seguente:

<u>Proposizione</u>: Un'applicazione lineare $f: V \to W$ di spazi vettoriali è iniettiva se e solo se $Ker(f) = \{0_V\}$.

<u>Dim</u>

Ricordiamo che $Ker(f) := \{v \in V : f(v) = 0_W\}$.

$\Rightarrow$) Supponiamo che $f: V \to W$ è iniettiva. Chiaramente $0_V \in Ker(f)$ poiché $f(0_V) = 0_W$.

Sia ora $v \in Ker(f)$. Allora, $f(v) = 0_W = f(0_V) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è iniettiva}}}{\Longrightarrow} v = 0_V$.

Ne segue che l'unico elemento appartenente a $Ker(f)$ è 0_V, quindi $Ker(f) = \{0_V\}$.

$\Leftarrow$) Supponiamo che $Ker(f) = \{0_V\}$.

Siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_V \Rightarrow$

$\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineare}}}{\Longrightarrow} f(v_1 - v_2) = 0_V \Rightarrow v_1 - v_2 \in Ker(f) = \{0_V\} \Rightarrow v_1 = v_2$.

Quindi f è iniettiva.

<u>Corollario</u> (del teorema del rango)

Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim(V) = \dim(W) = n$.
Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) f è iniettiva.

2) f è suriettiva.

3) f è un isomorfismo.

dim

Ci basterà mostrare che se $\dim(V) = \dim(W)$ allora

f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è suriettiva.

Abbiamo:

$$f \text{ è iniettiva } \overset{\text{proposizione precedente}}{\Leftrightarrow} \operatorname{Ker}(f) = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\text{teorema del rango}}{\Leftrightarrow} \dim(V) = rg(f) \underset{\substack{\text{ipotesi} \\ \dim(V)=\dim(W)}}{\Leftrightarrow} \dim(W) = rg(f) \Leftrightarrow f \text{ è suriettiva.}$$

Osservazioni:

Sia $f: V \to W$ un' applicazione di spazi vettoriali:

- se $\dim(V) > \dim(W)$ allora f non è iniettiva

Dim

se $\dim(V) > \dim(W) \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) \underset{\text{teorema del rango}}{=} \dim(V) - rg(f) \underset{\dim(V) > \dim(W)}{>} \dim(W) - rg(f) \geq 0.$

Quindi $\dim(\operatorname{Ker}(f)) > 0$. Ne segue che $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0_V\}$ e f non è iniettiva.

- se $\dim(V) < \dim(W)$ allora f non è suriettiva.

Dim

se $\dim(V) < \dim(W) \Rightarrow rg(f) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) \underset{\dim(V) < \dim(W)}{<} \dim(W) - \dim(\operatorname{Ker}(f))$

$\Rightarrow rg(f) < \dim(W) \Rightarrow f$ non è suriettiva.

Esempio

1) Sia $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^3$.

Per le osservazioni precedenti non esiste un' applicazione lineare iniettiva $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

Dal teorema del rango si ottiene infatti che $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \geq 1$.

2) Allo stesso modo non esiste un' applicazione lineare suriettive $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, poiché $rg(f) \leq 3$.

Matrici associate alle applicazioni lineari

Vediamo ora come possiamo associare alle applicazioni lineari delle matrici le cui proprietà riflettono le proprietà delle applicazioni lineari corrispondenti.

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n e m e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W.

Le immagini di $v_1, \dots, v_n$ si decompongono sulla base $\mathcal{B}'$ nel modo seguente:

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$f(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

con $a_{ij} \in K$, $\forall\ i = 1, \dots, m$, $\forall\ j = 1, \dots, n$.

Consideriamo la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Tale matrice è la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Def: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ due basi rispettivamente di V e W.

La **MATRICE DI f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$** è la matrice

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

le cui colonne sono le coordinate di $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ nella base $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m$$

Esempio

Consideriamo l'applicazione lineare:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \longmapsto (x-y,\ x+y,\ x+2y)$$

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ le basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

$\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$,

$\mathcal{B}' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Per scrivere $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)$ dobbiamo decomporre $f(1,0)$ e $f(0,1)$ sulla base $\mathcal{B}'$:

$$f(1,0) = (1,1,1) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)$$

$$f(0,1) = (-1,1,2) = -1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 2\cdot(0,0,1)$$

Quindi

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(1,0) & f(0,1) \end{array} \end{array}$$

Sia ora $\mathcal{B}_2 = \{(1,2), (3,4)\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}_2' = \{(0,1,1), (-1,1,0), (0,1,2)\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$.

Questa volta per scrivere $M_{\mathcal{B}_2'\mathcal{B}_2}(f)$ dobbiamo determinare le coordinate di $f(1,2)$ e $f(3,4)$ nella base $\mathcal{B}_2'$:

$$f(1,2) = (-1,3,5) = -1\cdot(0,1,1) + 1\cdot(-1,1,0) + 3\cdot(0,1,2).$$

$$f(3,4) = (-1,7,11) = 1\cdot(0,1,1) + 1\cdot(-1,1,0) + 5(0,1,2).$$

Quindi:

$$M_{\mathcal{B}_2'\mathcal{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(1,2) & f(3,4) \end{array} \end{array}.$$

Dall' esempio precedente notiamo subito che la matrice associata a $f: V \to W$ dipende dalla scelta delle basi di V e W.

Tuttavia alcune proprietà della matrice sono indipendenti dalla scelta di basi.

Mostriamo ad esempio che per ogni scelta delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V e W rispettivamente si ha:

$$\operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\right) = \operatorname{rg}(f),$$

cioè il rango della matrice associata ad f è indipendente dalle basi.
Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi rispettivamente di V e W.
Allora:

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\left(f(V)\right) = \dim\left(\langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle\right) \underset{\uparrow}{=} \dim\left(\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle\right) \underset{\uparrow}{=} \operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\right)$$

isomorfismo coordinato $\varphi: W \to K^m$ (se $U \subseteq W$, $\dim(U) = \dim(\varphi(U))$)

definizione di rango per colonne di una matrice

Quindi abbiamo il risultato seguente:

<u>Proposizione</u>: Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente n e m e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi rispettivamente di V e W.
Sia $f: V \to W$ un' applicazione lineare.
Allora:

1) f è suriettiva $\iff \operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\right) = m$

2) f è iniettiva $\iff \operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\right) = n$.

3) f è un isomorfismo $\iff \operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\right) = m = n \iff$
$\iff M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) \in M_n(K)$ è invertibile.

<u>Esempio</u>

Nell' esempio precedente abbiamo trovato.

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}\left(M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(f)\right) = 2 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} f \text{ è iniettiva, ma non suriettiva.}$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$