LEZIONE 16 - GEOMETRIA e ALGEBRA

04/05/22

Prima di passare al capitolo sulle applicazioni lineari, facciamo un sunto dei vari metodi visti fin qui per:

- calcolare il determinante di una matrice.
- calcolare il rango di una matrice.
- risolvere un sistema lineare.

• Come calcolare il determinante di una matrice A?

1) Se $A = (a) \in M_1(K) \Rightarrow \det(A) = a$.

2) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K) \Rightarrow \det(A) = ad - bc$.

3) Se $A \in M_n(K)$ (in particolare $n \geq 3$):
   - teorema di Laplace (pratico quando esiste una riga o colonna con "tanti" zeri).
   - algoritmo di Gauss-Jordan
   - regola di Sarrus (per $n=3$).

• Come calcolare il rango di una matrice A?

1) Se $A \in M_{m,n}(K)$:
   - Algoritmo di Gauss-Jordan (riduco a scalini e conto il numero di righe non nulle).
   - Principio dei minori orlati

2) Se $A \in M_n(K)$ e $\det(A) \neq 0 \Rightarrow rg(A) = n$.

• Come risolvere un sistema lineare $AX = b$?

<u>Compatibilità</u>:

- algoritmo di Gauss-Jordan (guardo la posizione dell'ultimo pivot)
- teorema di Rouché-Capelli (compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|b)$)

<u>Risoluzione</u> (se compatibile):

- dopo Gauss-Jordan individuo le variabili libere e "risalgo" il sistema a scalini.
- se $A \in M_n(K)$ e $\det(A) \neq 0$: metodo di Cramer.

APPLICAZIONI LINEARI

Def: Siano V e W due spazi vettoriali su K. Una funzione
$$f: V \longrightarrow W$$
si dice un' **APPLICAZIONE LINEARE** se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\forall\, \lambda \in K$, $\forall\, v \in V$.

Esempi

1) $V = W = \mathbb{R}^2$

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x+y, x)$.

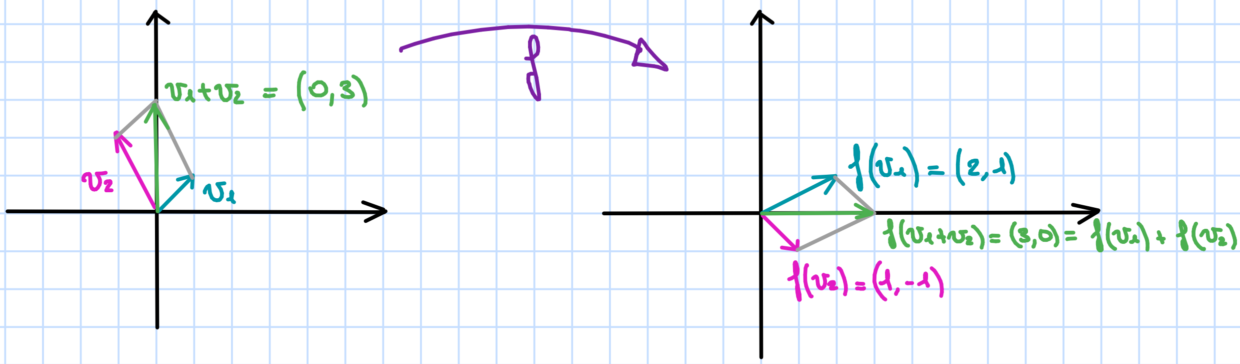
Mostriamo che f è un' applicazione lineare:

1. Siano $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Allora:
$$f(v_1+v_2) = f((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2) =$$
$$= (x_1+y_1, x_1) + (x_2+y_2, x_2) = f(v_1) + f(v_2). \quad ✓$$

2. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora
$$f(\lambda v) = f((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x) = \lambda (x+y, x) = \lambda f(v). \quad ✓$$

Geometricamente

Siano $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,2) \in \mathbb{R}^2$.



L' immagine del vettore somma v_1+v_2 è uguale alla somma delle immagini di v_1 e di v_2.

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2$

non è un' applicazione lineare.

Infatti, siano $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Allora abbiamo:

$$f(v_1) = 1^2+0^2+0^2 = 1$$

$$f(v_2) = 1^2+1^2+1^2 = 3$$

$$f(v_1+v_2) = f((2,1,1)) = 2^2+1^2+1^2 = 6 \neq \overbrace{f(v_1)+f(v_2)}^{4 \,=}$$

<u>Osservazioni</u>: 1) Si noti che, come nel caso dei sottospazi vettoriali, ① e ② sono equivalenti all'unica condizione:

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2), \quad \forall\, \lambda, \mu \in K, \ \forall\, v_1, v_2 \in V.$$

2) Dalla prima osservazione si ottiene che $\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $\forall\, v_1, \dots, v_n \in V$

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$ (f preserva le combinazioni lineari)

3) Sia $f: V \to W$ è un' applicazione lineare e siano 0_V e 0_W i vettori nulli rispettivamente di V e W. Allora:

$$f(0_V) = 0_W \quad \left(\text{infatti } f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot \underbrace{f(0_V)}_{\in W} = 0_W\right).$$

Questa osservazione può essere utilizzata per mostrare che una funzione $f: V \to W$ <u>non</u> è un'applicazione lineare

<u>Esempio</u>: La funzione $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto (x,1)$

non è un' applicazione lineare poiché

$$f(\underbrace{(0,0,0)}_{0_{\mathbb{R}^3}}) = (0,1) \neq \underbrace{(0,0)}_{0_{\mathbb{R}^2}}.$$

Introduciamo un po' di terminologia:

<u>Def</u>: • Un' applicazione lineare $f: V \to V$ ($W=V$) è detta un ENDOMORFISMO di V

• Un' applicazione lineare $f: V \to K$ ($W=K$) è detta un FUNZIONALE LINEARE.

- Un'applicazione lineare $f: V \to W$ è detta un ISOMORFISMO se f è biunivoca (= iniettiva + suriettiva).
- Un isomorfismo $f: V \to V$ è detto un AUTOMORFISMO di V.

Esempi

1) L'applicazione lineare $f: V \to W$ tale che
$$f(v) = 0_W, \ \forall \ v \in V$$
è detta APPLICAZIONE LINEARE NULLA.

2) L'applicazione lineare $id_V: V \to V$ tale che
$$id_V(v) = v, \ \forall \ v \in V$$
è detta IDENTITÀ. È facile mostrare che id_V è biunivoca ed è pertanto un automorfismo di V.

3) Nella Lezione 12 avevamo già visto un esempio di applicazione lineare: l'ISOMORFISMO COORDINATO.

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V allora l'isomorfismo coordinato è l'applicazione lineare
$$\varphi: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & K^n \\ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n & \longmapsto & (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{array}$$
che associa ad ogni elemento $v \in V$ le sue coordinate rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Abbiamo già mostrato che φ è biunivoca. Pertanto φ è un isomorfismo tra V e K^n.

4) Sia $V = U \oplus W$. Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come
$$v = u + w, \quad u \in U \text{ e } w \in W.$$

Le funzioni:
$$\pi_1: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ v = u + w & \longmapsto & u \end{array}, \qquad \pi_2: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v = u + w & \longmapsto & w \end{array}$$
sono due applicazioni lineari chiamate rispettivamente PROIEZIONI di V su U e su W.

Diamo un significato geometrico all'applicazione lineare di proiezione.

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^2 = \overbrace{\langle(1,0)\rangle}^{U} \oplus \overbrace{\langle(0,1)\rangle}^{W}$. Infatti $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

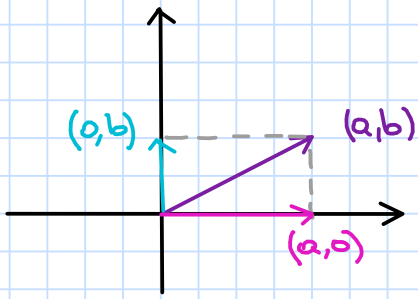
$$(a,b) = \underbrace{(a,0)}_{\in U} + \underbrace{(0,b)}_{\in W}.$$

Quindi in tal caso abbiamo:

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \langle(1,0)\rangle$$
$$(a,b) \longmapsto (a,0)$$

$$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \langle(0,1)\rangle$$
$$(a,b) \longmapsto (0,b)$$

ossia π_1 e π_2 sono rispettivamente le proiezioni sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



Proposizione: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali su K.
Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ e sia $w_i = f(v_i)$, $\forall\ i = 1, \dots, n$.
Allora:

$v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_n$ sono lin. dipendenti

$\Updownarrow$

$w_1, \dots, w_n$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti

Dim: per esercizio.

Proposizione: Siano V e W due spazi vettoriali su K. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e siano $w_1, \dots, w_n$ vettori arbitrari di W.

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f: V \to W$ tale che

$$f(v_i) = w_i, \quad \forall \quad i = 1, \dots, n.$$

__Dim__

Sia $f: V \to W$ un' applicazione lineare tale che $f(v_i) = w_i, \ \forall\ i = 1, \dots, n$.
Mostriamo che $\forall\, v \in V$, l'immagine $f(v)$ è univocamente determinata.

Poichè $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Ma allora, per linearità abbiamo:

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \underset{f(v_i) = w_i}{=} \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n.$$

È possibile mostrare che f così definita è lineare ed è unica per costruzione

__Osservazione__: La proposizione precedente afferma che è possibile definire un' applicazione lineare $f: V \to W$ definendo semplicemente le immagini degli elementi di una base di V.

__Esempio__

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che:

- $f((1,0,0)) = (3,2)$
- $f((0,1,0)) = (1,1)$
- $f((0,0,1)) = (-1,1)$

Qual è l'immagine di (a,b,c), $a,b,c \in \mathbb{R}$?

Siano $a,b,c \in \mathbb{R}$, allora per linearità abbiamo:

$$f((a,b,c)) = f(a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)) \underset{f \text{ lineare}}{=} a f((1,0,0)) + b f((0,1,0)) + c f((0,0,1)) =$$

decompongo (a,b,c) sulla base $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$= a(3,2) + b(1,1) + c(-1,1) = (3a+b-c,\ 2a+b+c)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f((1,0,0)) = (3,2) \\ f((0,1,0)) = (1,1) \\ f((0,0,1)) = (-1,1) \end{array}}$$

Quindi f è l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(a,b,c) \mapsto (3a+b-c,\ 2a+b+c)$.

<u>Proposizione</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Allora:

1) Se S_V è un sottospazio di V, $f(S_V) = \{f(v) : v \in S_V\}$ è un sottospazio di W.

2) Se S_W è un sottospazio di W, $f^{-1}(S_W) = \{v \in V : f(v) \in S_W\}$ è un sottospazio di V.

<u>Dim</u>

1) Mostriamo che $f(S_V)$ è un sottospazio di W:

- $f(S_V) \neq \emptyset$: infatti, poichè $0_V \in S_V \Rightarrow f(0_V) = 0_W \in f(S_V)$.
- Siano $w_1, w_2 \in f(S_V)$ e $\lambda, \mu \in K$. Allora, per definizione di $f(S_V)$, $\exists\ v_1, v_2 \in S_V$ tali che $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$. Quindi abbiamo:

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearità} \\ \text{di } f}}{=} f(\overbrace{\lambda v_1 + \mu v_2}^{\in S_V}) \in f(S_V).$$

Quindi $f(S_V)$ è un sottospazio di W.

2) Mostriamo che $f^{-1}(S_W)$ è un sottospazio di V.

- $0_V \in f^{-1}(S_W)$ poichè $f(0_V) = 0_W \in S_W \Rightarrow f^{-1}(S_W) \neq \emptyset$.
- Siano $v_1, v_2 \in f^{-1}(S_W)$. Allora, per definizione di $f^{-1}(S_W)$, $\exists\ w_1, w_2 \in S_W$ tali che $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$.

  Siano $\lambda, \mu \in K$. Mostriamo che $\lambda v_1 + \mu v_2 \in f^{-1}(S_W)$, o equivalentemente che $f(\lambda v_1 + \mu v_2) \in S_W$. Abbiamo:

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ è lineare}}}{=} \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = \lambda w_1 + \mu w_2 \underset{\substack{\uparrow \\ S_W \text{ è sottospazio} \\ \text{e } w_1, w_2 \in S_W}}{\in} S_W.$$

Concludiamo che $f^{-1}(S_W)$ è un sottospazio di V.

Consideriamo ora due casi particolari della proposizione precedente:

- $S_V = V \longrightarrow f(V)$ è l'IMMAGINE di f.
- $S_W = \{0_W\} \longrightarrow f^{-1}(\{0_W\})$ è il NUCLEO di f.

Più precisamente abbiamo la seguente definizione:

Def: Sia $f: V \to W$ un' applicazione lineare di spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Il sottospazio di V:

Kernel

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_W\}) = f^{-1}(0_W) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$$

è detto NUCLEO di f.

Il sottospazio di W:

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{f(v) : v \in V\}$$

è detto IMMAGINE di f.

Se $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ hanno dimensione finita, allora chiamiamo NULLITÀ la dimensione di $\mathrm{Ker}(f)$ e RANGO la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$. Denotiamo il rango di f $\mathrm{rg}(f)$.

Esempio

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x+y, y+z)$$

- Determiniamo la dimensione e una base del nucleo di f. Partiamo dalla definizione:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, y+z) = (0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \text{ e } y+z=0\} = \{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{z(1,-1,1) : z \in \mathbb{R}^3\} = \langle (1,-1,1) \rangle$$

risolviamo il sistema omogeneo
$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Quindi: $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ e una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è $\{(1,-1,1)\}$.

- Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$. Partiamo anche qui dalla definizione:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f((x,y,z)) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(x+y, y+z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x(1,0) + y(1,1) + z(0,1) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0), \cancel{(1,1)}, (0,1) \rangle$$

$(1,1) = (1,0) + (0,1)$

Quindi $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ e $\{(1,0),(0,1)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$.

Ne segue che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ossia f è suriettiva.

Si noti che $\underset{3}{\dim(\mathbb{R}^3)} \overset{}{=} \underset{1}{\dim(\mathrm{Ker}(f))} + \underset{2}{\mathrm{rg}(f)}$. Vedremo nella prossima lezione che questo risultato è vero per qualsiasi applicazione lineare $f: V \to W$ con $\dim(V) < +\infty$.