LEZIONE 15 - GEOMETRIA e ALGEBRA

29/04/22

In questa lezione parleremo del determinante di una matrice quadrata e delle sue applicazioni.

IL DETERMINANTE

Il determinante è una funzione che associa a ogni matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ un elemento di K.

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$
$$A \longmapsto \det(A).$$

Si denota:

$$|A| = \det(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nel suo significato originale il determinante serve a <u>determinare</u> l'unicità della soluzione di un sistema lineare.

Consideriamo ad esempio il sistema seguente:

$$\begin{cases} aX + bY = e \\ cX + dY = f \end{cases}$$

Supponiamo per comodità $a \neq 0$ e applichiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}}_{b} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - \frac{c}{a}R_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & f - \frac{ec}{a} \end{array}\right)$$

Il sistema possiede un'unica soluzione $\iff rg(A) = rg(A|b) = 2 \iff d - \frac{bc}{a} \neq 0$

$\iff ad - bc \neq 0.$

Vedremo a breve che $ad - bc$ è proprio il determinante di una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

È possibile definire il determinante in vari modi. Noi lo definiremo attraverso la cosiddetta definizione assiomatica, che suggerisce anche un metodo di calcolo.

Def: Sia $n \geq 1$.
Il DETERMINANTE è l'unica funzione

$$\mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$

avente le proprietà seguenti:

1) $\det(I_n) = 1$.

2) Si comporta nel modo seguente rispetto all'algoritmo di Gauss-Jordan:

- se B è ottenuta scambiando due righe o due colonne di A, allora

$$\det(B) = -\det(A).$$

- se B è ottenuta da A moltiplicando una riga o una colonna di A per $\lambda \in K$, allora:

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

- se B è ottenuta da A sommando a una riga (risp. una colonna) un multiplo di un'altra riga (risp. un'altra colonna), allora

$$\det(B) = \det(A).$$

Esempio

Vediamo come possiamo utilizzare tale definizione per calcolare il determinante di una matrice A.
L'idea è quella di ridurre la matrice A, se possibile, alla matrice identità, di cui conosciamo il valore del determinante. Le operazioni effettuate permetteranno di "risalire" al valore del determinante della matrice di partenza A.

Supponiamo dunque di voler calcolare il determinante di $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 + \frac{3}{5} R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1 \\ R_2 \leftarrow -\frac{1}{5} R_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Quindi:

$$\det(A) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \det(I_2) = 1 \implies \det(A) = 10.$$

Come si calcola il determinante di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$?

$\boxed{n=1}$ Sia $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(K)$, allora $\det(A) = a_{11} \in K$.

esempio: $\det(-3) = -3$.

$\boxed{n=2}$ Sia $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(K)$. Allora $\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}= ad-bc \in K$.

<u>esempio</u> : $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}= 1\cdot 4-2\cdot 3=-2$, $\begin{vmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-(-6\cdot(-1))=0$

↑ notare che le due righe sono proporzionali.

<u>Per $n\geq 3$</u> illustreremo un <u>procedimento ricorsivo</u> (o induttivo) per il calcolo del determinante di una matrice $A\in\mathcal{M}_n(K)$ dovuto a Laplace

Si tratta di un procedimento ricorsivo poiché il saper calcolare il determinante di una matrice $n\times n$ permette di calcolare il determinante di una matrice $(n+1)\times(n+1)$.

Prima di enunciare il teorema di Laplace dobbiamo introdurre alcune nozioni.

<u>Def</u>: Una sottomatrice $p\times q$ di una matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(K)$ è una matrice costituita dagli elementi di A comuni a p righe e q colonne.

Se $i_1,\dots,i_p$ e $j_1,\dots,j_q$ sono rispettivamente gli indici scelti delle righe e delle colonne, allora denotiamo la sottomatrice corrispondente con

$$A(i_1\cdots i_p \mid j_1\cdots j_q).$$

Denotiamo

$$A_{ij}:=A(1\cdots\hat{i}\cdots m\mid 1\cdots\hat{j}\cdots n)$$

la matrice ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

<u>Esempio</u>

Sia $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$.

Allora:

$$A(\underset{\substack{\uparrow\\ i_1}}{2}\ \underset{\substack{\uparrow\\ i_2}}{3}\mid \underset{\substack{\uparrow\\ j_1}}{2}\ \underset{\substack{\uparrow\\ j_2}}{5})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & \textcircled{7} & 8 & 9 & \textcircled{10}\\ 11 & \textcircled{12} & 13 & 14 & \textcircled{15}\\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 12 & 15\end{pmatrix}.$$

$$A(1\ 2 \mid 1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 6 & 7 & 8 & 9 & \cancel{10} \\ 11 & 12 & 13 & 14 & \cancel{15} \\ 16 & 17 & 18 & 19 & \cancel{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

Proposizione: Se B è una sottomatrice di A allora $\mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A)$.

Def: Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.
Per ogni $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ definiamo il COFATTORE o COMPLEMENTO ALGEBRICO dell'elemento a_{ij} di A

$$\mathrm{cof}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

La MATRICE COFATTORE di A è

$$\mathrm{cof}(A) = \left(\mathrm{cof}(A)_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K).$$

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(K)$. Allora:

$$\mathrm{cof}(A)_{23} = (-1)^{2+3} \det(A_{23}) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = 6.$$

↑
elimino la
2ª riga e la
3ª colonna

Teorema di Laplace

Sia $A \in M_n(K)$.

Per ogni $1 \leq i \leq n$ si ha:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(sviluppo del determinante di A secondo la i-esima riga)

Per ogni $1 \leq j \leq n$ si ha:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(sviluppo del determinante di A secondo la j-esima colonna)

Chiaramente il valore del determinante di A è indipendente dalla riga e dalla colonna scelta per lo sviluppo.

Esempio

$\boxed{n=3}$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

Come scelgo la riga o la colonna secondo la quale sviluppare il determinante?

Si nota subito che il metodo di Laplace è più efficiente se applicato a righe o colonne con "tanti" zero.

Per il nostro esempio scegliamo quindi di sviluppare secondo la prima colonna:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\underset{\overset{\uparrow}{a_{11}}}{2}\cdot(-1)^{1+1}\det\underbrace{\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}}_{A_{11}}+\cancel{\underset{\overset{\uparrow}{a_{21}}}{0}\cdot(-1)^{2+1}\cdot\det\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}}_{A_{21}}}+$$

$$+\underset{\overset{\uparrow}{a_{31}}}{1}\cdot(-1)^{3+1}\det\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}}_{A_{31}}=$$

$$=2\cdot(-5+2)+(-1-15)=-6-16=-22.$$

Sia ora $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ una generica matrice 3×3.

Sviluppando $\det(A)$ con il metodo di Laplace rispetto alla prima riga otteniamo:

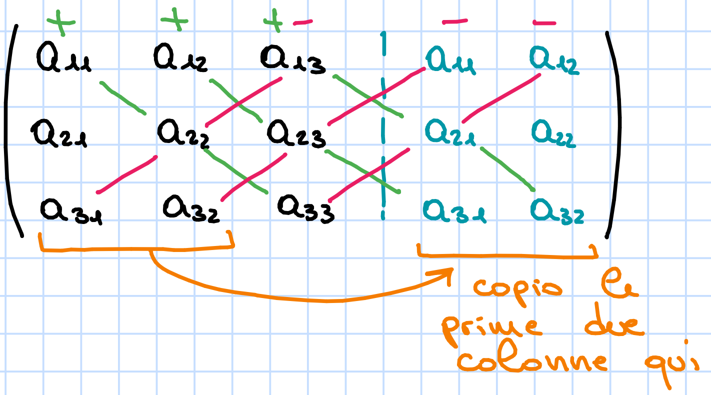
$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Possiamo interpretare "visualmente" il risultato ottenuto nel modo seguente:



$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12},$$

Questo metodo mnemonico, valido solo per il calcolo del determinante di una matrice 3x3, è detto

REGOLA DI SARRUS.

Ulteriori esempi

1) Calcolare il determinante della seguente matrice 4x4:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il metodo di Laplace che ci permette di ridurre il calcolo del determinante di una 4x4 al calcolo di determinanti di 3x3.

sviluppo secondo la 2ª colonna

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-2+8} + (-1)\cdot(-1)^{3+2}\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{24-5+2-15} =$$

$$= -2+8+24-5+2-15 = 12.$$

regola di Sarrus

2) Sia $A \in M_n(K)$ una matrice con una riga o una colonna nulla.
Allora sviluppando il $\det(A)$ secondo quella riga o quella colonna si ottiene $\det(A) = 0$.

4) Usiamo il metodo di Laplace e il principio di induzione per mostrare che il determinante di una matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

Per ogni $n \geq 1$ vogliamo dunque mostrare che

$$P(n) = \text{“} \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} . \text{”}$$

è vera

BASE DELL' INDUZIONE : $n=1$: $\det(a_{11}) = a_{11} \Rightarrow P(1)$ è vera.

PASSO INDUTTIVO : mostriamo che se $P(n)$ è vera, allora $P(n+1)$ è vera.

IPOTESI INDUTTIVA [Supponiamo dunque che $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Allora abbiamo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_{nn} & \\ 0 & & & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sviluppo} \\ \text{secondo} \\ \text{l'ultima riga}}}{=} a_{n+1,n+1} \cdot (-1)^{(n+1)+(n+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi induttiva}}}{=} a_{n+1,n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii} .$$

Quindi $P(n+1)$ è vera e l'asserto è dimostrato.

4) Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è una matrice triangolare superiore o inferiore allora $\det(A)$ è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

Dim.: per esercizio.

Quest'ultimo punto, in particolare, suggerisce un metodo per il calcolo del determinante attraverso l'algoritmo di Gauss-Jordan.
Infatti l'algoritmo di Gauss-Jordan riduce una qualsiasi matrice quadrata in una matrice triangolare superiore.

Calcolare il determinante di una matrice con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

Supponiamo di dover calcolare il determinante di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'algoritmo di Gauss Jordan permette di ridurre A in una matrice triangolare superiore $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ unicamente attraverso delle operazioni di I e III tipo:

$$A \xrightarrow[\substack{\text{Operazioni elementari di:} \\ \bullet\ \text{I tipo: } R_i \leftrightarrow R_j \\ \bullet\ \text{III tipo: } R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j}]{} B = (b_{ij}) \quad \text{TRIANGOLARE SUPERIORE}$$

Dalla definizione assiomatica del determinante otteniamo:

$$\det(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ogni permutazione} \\ \text{cambia il segno} \\ \text{del determinante.}}}{(-1)^{\#\text{permutazioni}}} \det(B) = (-1)^{\#\text{permutazioni}} \prod_{i=1}^{n} b_{ii}$$

Esempio

Calcoliamo il determinante della 4x4 dell'esempio precedente con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + 4R_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 15 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - \frac{13}{17} R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & 17 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{17} \end{pmatrix} = B.$$

Poichè non abbiamo effettuato alcuna permutazione abbiamo:

$$\det(A) = (-1)^0 \det(B) = \det(B) \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ triangolare} \\ \text{superiore}}}{=} (-1) \cdot 1 \cdot 17 \cdot \left(-\frac{12}{17}\right) = 12.$$

Ritroviamo, ovviamente, lo stesso risultato precedente.

Il determinante gode delle seguenti proprietà.

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

1) Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ha una riga o una colonna nulla allora $\det(A) = 0$

2) Se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ ha due righe (o due colonne) uguali o proporzionali, allora $\det(A) = 0$.

3) Se una riga (risp. una colonna) di $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è combinazione lineare di due o più righe (risp. di due o più colonne) allora $\det(A) = 0$.

4) Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Allora $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema di Binet

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Allora

$$\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B).$$

Osservazione: Una conseguenza del teorema di Binet è che se $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è invertibile allora $\det(A) \neq 0$ e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

dim: Se A è invertibile allora $\exists\, A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ tale che:

$$AA^{-1} = I_n \Longrightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

$\parallel \leftarrow$ teorema di Binet

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

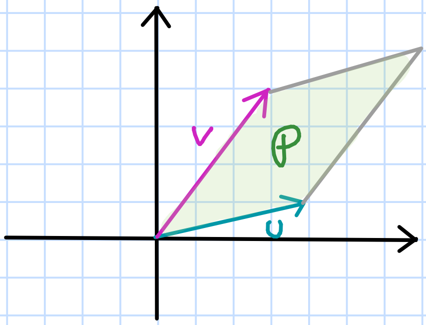
Interpretazione geometrica del determinante di una matrice 2×2 o 3×3.

Nel caso $n=2$ e $n=3$ il determinante ha un significato geometrico.

$\boxed{n=2}$ - Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Siano $u = (a,b)$, $v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$. Sia P il parallelogramma di lati u e v. Allora è possibile mostrare che

$$|\det(A)| = \text{Area}(P).$$



valore assoluto

$$\text{Area}(P) = |\det(A)|$$

Più precisamente:

$\det(A) = \text{Area}(P)$, se per sovrapporre u a v percorrendo l'angolo < 180° si deve ruotare u in senso antiorario.

$\det(A) = -\text{Area}(P)$, se per sovrapporre u a v si deve ruotare u in senso orario.

Da questa interpretazione geometrica è chiaro inoltre che

$\det(A) = 0 \iff \text{Area}(P) = 0 \iff$ P è un parallelogramma degenere $\iff$ u e v sono collineari (ossia linearmente dipendenti).

$\boxed{n=3}$ - Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Siano $u = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $v = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $w = (a_{31}, a_{32}, a_{33}) \in \mathbb{R}^3$. Sia P il parallelepipedo di lati u, v e w. Allora

$$|\det(A)| = \text{Volume}(P).$$

Anche in questo caso quindi abbiamo che $\det(A) = 0$ se e solo se u, v e w sono linearmente dipendenti. (in tal caso infatti il parallelepipedo è un parallelogramma, che ha volume nullo).

Abbiamo quindi visto geometricamente per n = 2, 3 che n vettori di K^n sono linearmente indipendenti se e solo se $\det(A) \neq 0$, dove A è la matrice che ha per righe gli n vettori.

Più in generale abbiamo il risultato seguente:

<u>Proposizione</u>: Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

I parte [Allora A è invertibile $\iff rg(A) = n \iff \det(A) \neq 0$.

II parte [In tal caso $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [(cof(A))]^T$.

<u>Dim</u>

Dimostriamo solo la prima parte dell'enunciato.

Abbiamo già visto che A è invertibile se e solo se $rg(A) = n$.
Mostriamo ora che A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow)$ Abbiamo già visto che questa implicazione è una conseguenza del teorema di Binet.

$\Leftarrow)$ Mostriamo che se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile o, equivalentemente, che se A non è invertibile $\Rightarrow \det(A) = 0$.

Se A non è invertibile $\Rightarrow rg(A) < n \Rightarrow$ le righe di A sono linearmente dipendenti. Per le proprietà del determinante si ottiene che $\det(A) = 0$.

Esempio

La II parte della proposizione rappresenta un metodo di calcolo dell'inversa di una matrice.

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dalla regola di Sarrus otteniamo $\det(A) = -3$.

Calcoliamo la matrice cofattore:

$$cof(A)_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$cof(A)_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$cof(A)_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$cof(A)_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$cof(A)_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$cof(A)_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$cof(A)_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$cof(A)_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$cof(A)_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[cof(A) \right]^T = -\frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora un ulteriore procedimento per il calcolo del rango di una matrice.
Partiamo dalla definizione seguente.

Def: Sia $M \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Un **MINORE** di M è il determinante di una sottomatrice quadrata. L'ordine del minore è l'ordine della sottomatrice quadrata corrispondente.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. I minori:

$D_1 = a_{11}$, $D_2 = \det(A(12|12))$, ..., $D_i = \det(A(12\cdots i|12\cdots i))$, ..., $D_n = \det(A)$.

si dicono i MINORI PRINCIPALI di A.

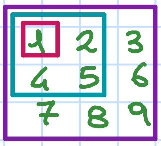
Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I minori principali sono:

$D_1 = 1$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-8 = -3$



$D_3 = \det(A) \overset{\uparrow}{=} 0$

in un esempio precedente abbiamo visto che A non è invertibile

teorema per il calcolo del rango di una matrice.

Principio dei minori orlati (Teorema di Kronecker)

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Sia M una sottomatrice quadrata di ordine p con $\det(M) \neq 0$.

Si definiscono orlati di M tutte le sottomatrici quadrate di ordine $p+1$ ottenute aggiungendo a M una riga e una colonna di A.

Se tutti gli orlati hanno determinante nullo, allora $rg(A) = p$!

Esempio

Supponiamo di voler calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Partiamo da un minore non nullo, ad esempio

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$.

Possiamo orlare la sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ soltanto in due modi diversi:

$$① \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -5 \end{matrix} & 1 \\ \begin{matrix} 2 & -1 \end{matrix} & 3 \end{pmatrix} \qquad ② \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -5 \end{matrix} & 1 \\ \begin{matrix} 2 & -1 \end{matrix} & 3 \end{pmatrix}$$

In ciascun caso otteniamo:

$$① \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 5 - 1 = 0$$

$$② \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 3 = 0.$$

Poichè tutti i minori orlati sono nulli otteniamo $rg(A) = 2$.

Concludiamo questa lezione con un'applicazione dei determinanti alla risoluzione dei sistemi lineari.

Il teorema di Cramer permette di risolvere sistemi lineari di n equazioni in n incognite quando esiste un'unica soluzione.

Teorema di Cramer

Consideriamo il sistema

notare che A deve essere quadrata

$$AX = b,$$

con $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $b \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ e $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$.

Se A è invertibile $(\Leftrightarrow rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0)$, allora per il teorema di Rouché-Capelli il sistema possiede esattamente una soluzione $(x_1, \dots, x_n)$ data da:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)\ ] \neq 0}$$

dove A_i è la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con il vettore b.

Esempio

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 3X + 2Z = 1 \\ Y - Z = 3 \\ X + Y + Z = 2. \end{cases}$$

Vediamo innanzitutto se il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2+3 = 4 \neq 0 \Rightarrow$$ il sistema ammette un'unica soluzione $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$

Utilizziamo il metodo di Cramer per determinare x_1, x_2 e x_3.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} \overset{\overset{b}{\downarrow}}{1} & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1+6-4+1}{4} = 1.$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{9-1-6+6}{4} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6-1-9}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è data da $(1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$.