LEZIONE 14 - GEOMETRIA e ALGEBRA

27/04/22

Nell'ultima lezione abbiamo introdotto il concetto di RANGO di un insieme di vettori.
Richiamiamo qui la definizione per comodità.

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, \dots, v_p\}$ un sottoinsieme finito di V.
Il **RANGO** di $\{v_1, \dots, v_p\}$ è la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_p$:

$$rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = \dim(\langle v_1, \dots, v_p \rangle).$$

Equivalentemente è il numero <u>massimo</u> di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1, \dots, v_p\}$.

A partire da questa definizione, definiamo ora il rango di una matrice.

Def: Sia $A \in M_{m,n}(K)$.
Il **RANGO PER RIGHE** di A è il rango dell'insieme delle sue righe (vettori in K^n).
Il **RANGO PER COLONNE** di A è il rango dell'insieme delle sue colonne (vettori in K^m).

Esempio

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

$(1,0,0,1)$ e $(0,1,0,0)$ sono linearmente indipendenti e $(1,-1,0,1) = (1,0,0,1) - (0,1,0,0)$.

rango per righe $= rg(\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,-1,0,1)\}) = 2$

rango per colonne $= rg(\{(1,0,1), (0,1,-1), (0,0,0), (1,0,1)\}) = 2$

$\langle (1,0,1), (0,1,-1), (0,0,0), (1,0,1) \rangle = \langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle$
e $\dim(\langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle) = 2$.

Notiamo che per la matrice A considerata il rango per righe è uguale al rango per colonne.

Non si tratta di una coincidenza, infatti abbiamo il risultato seguente, che per questioni di tempo non dimostreremo.

Teorema: Il rango per righe e il rango per colonne di una matrice coincidono.
Possiamo dunque chiamare semplicemente **rango** di $A \in M_{m,n}(K)$ il rango per righe (o per colonne) di A. Lo denotiamo $rg(A)$.

Osservazioni:

- Se $A \in M_{m,n}(K)$, allora $rg(A) \leq \min\{m,n\}$.

  Attenzione: le righe e le colonne di A non generano lo stesso sottospazio. Infatti tali sottospazi non sono neanche necessariamente contenuti nello stesso spazio vettoriale (se $m \neq n$, $K^m \neq K^n$).

- Poiché il rango per righe è uguale al rango per colonne abbiamo:

  $$rg(A) = rg(A^T)$$

Esempio: Consideriamo la matrice a scalini:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango, calcolando il rango per righe.

Per definizione abbiamo:

$$rg(M) = rg(\{(1,2,3,4,5), (0,6,7,8,9), (0,0,0,10,11), (0,0,0,0,12), (0,0,0,0,0)\}) =$$

$$= \dim(\langle(1,2,3,4,5), (0,6,7,8,9), (0,0,0,10,11), (0,0,0,0,12), \cancel{(0,0,0,0,0)}\rangle).$$

↑ chiaramente rimuovendo il vettore nullo lo spazio vettoriale generato non cambia.

Mostriamo che i vettori $(1,2,3,4,5)$, $(0,6,7,8,9)$, $(0,0,0,10,11)$, e $(0,0,0,0,12)$ sono linearmente indipendenti. Siano $\lambda, \mu, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lambda(1,2,3,4,5) + \mu(0,6,7,8,9) + \delta(0,0,0,10,11) + \gamma(0,0,0,0,12) = (0,0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \lambda,\ 2\lambda+6\mu,\ 3\lambda+7\mu,\ 4\lambda+8\mu+10\delta,\ 5\lambda+9\mu+11\delta+12\gamma) = (0,0,0,0,0).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\lambda + 6\mu = 0 \\ 4\lambda + 8\mu + 10\delta = 0 \\ 5\lambda + 9\mu + 11\delta + 12\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \delta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Quindi $rg(M) = 4$. Notiamo che il rango di M è uguale al numero di righe non nulle di M.

Più in generale abbiamo:

Proposizione: Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero di righe non nulle.

Dim

Si mostra facilmente che le righe non nulle di una matrice a scalini sono linearmente indipendenti.

Con i prossimi due risultati mostriamo che è possibile calcolare il rango di una matrice utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan.

Proposizione: Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
Siano $B \in \mathcal{M}_m(K)$, $C \in \mathcal{M}_n(K)$ due matrici invertibili.

Allora $rg(A) = rg(BA) = rg(AC)$,

ovvero moltiplicare a sinistra o a destra per una matrice invertibile non modifica il rango di A.

Corollario: Il rango di una matrice A è uguale al rango di una matrice a scalini B ottenuta da A attraverso delle operazioni elementari.
Inoltre il sottospazio generato dalle righe di A è lo stesso del sottospazio generato dalle righe di B.

Dim: Ogni operazione elementare corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per una matrice invertibile, che non modifica il rango.

Esempio

Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & -14 \end{pmatrix}$.

Da quanto visto il rango di A è lo stesso del rango della matrice a scalini ottenuta da A attraverso delle operazioni elementari.

Effettuiamo dunque il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1}]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice a scalini ha rango 2 (2 righe non nulle) concludiamo che $rg(A) = 2$.

Questo semplice procedimento per il calcolo del rango di una matrice ci offre nuovi metodi per risolvere delle tipologie di problemi che abbiamo già affrontato, come illustrato qui di seguito.

Applicazioni

1) Calcolare una base e la dimensione del sottospazio seguente di $\mathbb{R}^5$:

$$U=\langle(1,-3,2,0,1),(1,1,3,1,3),(3,-5,2,1,7),(-1,7,-1,0,1),(0,4,1,1,2)\rangle.$$

Sia A la matrice che ha per righe i vettori che generano U:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2&0&1\\1&1&3&1&3\\3&-5&2&1&7\\-1&7&-1&0&1\\0&4&1&1&2\end{pmatrix}$$

Poichè $\dim(U)=rg(A)$, calcoliamo il rango di A con il metodo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&0&1\\1&1&3&1&3\\3&-5&2&1&7\\-1&7&-1&0&1\\0&4&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_2\leftarrow R_2-R_1\\R_3\leftarrow R_3-3R_1\\R_4\leftarrow R_4+R_1}]{}\begin{pmatrix}1&-3&2&0&1\\0&4&1&1&2\\0&4&-4&1&4\\0&4&1&0&2\\0&4&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\leftarrow R_3-R_2\\R_4\leftarrow R_4-R_2\\R_4\leftarrow R_4-R_2}]{}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&2&0&1\\0&4&1&1&2\\0&0&-5&0&2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Bigg]\ \text{ha 4 vettori non nulli} \Rightarrow rg(A)=4$$

Otteniamo $\dim(U)=4$, e una base di U è data dalle righe non nulle della matrice a scalini ottenuta (in quanto esse generano lo stesso sottospazio delle righe della matrice di partenza).

Quindi $\{(1,-3,2,0,1),(0,4,1,1,2),(0,0,-5,0,2),(0,0,0,-1,0)\}$ è una base di U.

2) L'insieme $\{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

$\{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3 \iff \{(1,1,1),(1,2,2),(1,2,3)\}$ sono linearmente indipendenti $\iff rg\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=3.$

Calcoliamo quindi il rango di $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_2]{} \left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

3 righe non nulle

Quindi $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3$. Ne segue che $\{(1,1,1), (1,2,2), (1,2,3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Il rango ci permette facilmente di stabilire se una matrice è invertibile o meno. Abbiamo infatti il risultato seguente:

<u>Proposizione</u>: Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(K)$ è invertibile se e solo se $\operatorname{rg}(A) = n$, ovvero una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo.

<u>Dim</u>

$(\Rightarrow)$ Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ una matrice invertibile. Allora esiste $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(K)$ tale che $AA^{-1} = I_n$. Ma allora:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(AA^{-1}) = \operatorname{rg}(I_n) = n$$

il rango non cambia se moltiplichiamo per una matrice invertibile.

I_n è una matrice a scalini con n righe non nulle.

$(\Leftarrow)$ Sia $A \in \mathcal{M}_n(K)$ di rango n e siano $R_1, \dots, R_n \in K^n$ le righe di A. Allora $\{R_1, \dots, R_n\}$ è una base di K^n. In particolare $R_1, \dots, R_n$ generano K^n.

Siano

$$\left.\begin{aligned} E_1 &:= (1, 0, \dots, 0), \\ E_2 &:= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ E_n &:= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}\right]$$

vettori della base canonica di K^n.

Allora, poiché $R_1, \dots, R_n$ generano K^n, $\exists\, b_{ij} \in K$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, tali che

$$\begin{aligned} E_1 &= b_{11} R_1 + \dots + b_{1n} R_n \\ E_2 &= b_{21} R_1 + \dots + b_{2n} R_n \\ &\vdots \\ E_n &= b_{n1} R_1 + \dots + b_{nn} R_n. \end{aligned}$$

Sia $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$.

È facile allora mostrare che $BA = I_n$. Quindi A è invertibile.

Esempio

Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & K \end{pmatrix}$ è invertibile?

Sappiamo che A è invertibile se e solo se $rg(A) = 3$.

Calcoliamo il rango, riducendo A a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & K \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & K-21 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2]{} \left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & K-9 \end{pmatrix}\right] \begin{array}{l} \text{3 righe non nulle} \\ \iff K \neq 9. \end{array}$$

Quindi $rg(A) = 3$ se e solo se $K \neq 9$. Ne segue che A è invertibile se e solo se $K \neq 9$.

Torniamo ora ai sistemi lineari, poiché la nozione di rango permette di stabilire facilmente se un sistema è compatibile o meno.

Teorema di Rouché-Capelli (criterio di compatibilità di un sistema lineare)

I parte

Un sistema lineare di m equazioni e n incognite

$$AX = b,$$

dove $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $b \in M_{m,1}(K)$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(A|b)$.

II parte

In tal caso il sistema possiede ∞^{n-r} soluzioni, dove $r = rg(A)$.

Dim

I parte

Per definizione il sistema $AX = b$ è compatibile se e solo se esiste $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tale che

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \underset{\substack{\uparrow \\ A = (a_{ij})}}{\iff} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ è combinazione lineare di } \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \iff rg(A) = rg(A|b).$$

Supponiamo ora che $AX = b$ sia un sistema compatibile.
Sia $r = rg(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I parte}}}{=} rg(A|b)$.

II parte

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan a $(A|b)$, otteniamo una matrice a scalini con r righe non nulle e quindi r pivots (si noti che l'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna, altrimenti $rg(A) \neq rg(A|b)$).

Quindi il sistema possiede $n-r$ variabili libere e quindi ∞^{n-r} soluzioni.

Esempio

Per quali valori di $K \in \mathbb{R}$ il sistema seguente è compatibile?

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1 \\ X_1 + X_4 = 3 \\ -X_2 - X_3 + 7X_4 = 6 \\ -X_1 - 2X_2 - 2X_3 + 3X_4 = K . \end{cases}$$

Consideriamo la matrice orlata associata al sistema e riduciamola a scalini con l'algoritmo di Gauss-Jordan.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ K \end{matrix}}_{b}\right) \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & K+1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & K-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{4}{7}R_3} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ \frac{7K-23}{7} \end{matrix}}\right)$$

Quindi $rg(A) = 3$ e $rg(A|b) = \begin{cases} 3 & \text{se } K = \frac{23}{7} \\ 4 & \text{se } K \neq \frac{23}{7} \end{cases}$.

Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile se e solo se $K = \frac{23}{7}$.

Osservazione: Se $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, cioè se $AX = b$ è un sistema omogeneo, allora $rg(A) = rg(A|b)$. Quindi ritroviamo che un sistema omogeneo è sempre compatibile. Inoltre l'insieme delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n-r$, dove $r = rg(A)$.

Esempio: Determinare la dimensione e una base del sottospazio

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x - 2y + 3t = 0 \\ y - z + t = 0 \\ 2x - y - 3z + 9t = 0 . \end{cases} \right\}$$

Per la dimensione di S determiniamo il rango di $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $r = rg(A) = 2$. Poichè il sistema possiede 4 variabili, $dim(S) = 4 - 2 = 2$.

Per determinare una base di S, determiniamo l'insieme delle soluzioni del sistema.
La matrice a scalini ottenuta corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} X - 2Y + 3T = 0 \\ Y - Z + T = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{scegliamo } Z \text{ e } T \text{ come variabili libere}]{} \begin{cases} X - 2Y = -3T \\ Y = Z - T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2Z - 5T \\ Y = Z - T \end{cases}.$$

Quindi
$$S = \{(x,y,z,t) : y = z-t \text{ e } x = 2z-5t, \ z,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(2z-5t, z-t, z, t) : z,t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{z(2,1,1,0) + t(-5,-1,0,1) : z,t \in \mathbb{R}\}$$

Ne segue che $(2,1,1,0)$ e $(-5,-1,0,1)$ generano S. Poichè $dim(S)=2$ concludiamo che $\{(2,1,1,0), (-5,-1,0,1)\}$ è una base di S.

Si noti che $(2,1,1,0)$ si ottiene per $z=1$ e $t=0$ e $(-5,-1,0,1)$ per $z=0$ e $t=1$. Questa scelta di z e t assicura che i vettori ottenuti sono linearmente indipendenti.