LEZIONE 13 - GEOMETRIA e ALGEBRA

13/04/22

Nella lezione precedente abbiamo definito la dimensione di uno spazio vettoriale come il numero di elementi di una sua base qualsiasi.

Vediamo ora qualche risultato sulla dimensione dei sottospazi di uno spazio vettoriale.

<u>Proposizione</u>: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Allora:

1) $\dim(W) \leq \dim(V)$.

2) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$

<u>Dim</u>

Supponiamo $\dim(V) = n$.

1) Se $W = \{\underline{0}\}$, allora $\dim(W) = 0 \leq n$ (quindi ① è soddisfatta)

Supponiamo dunque $W \neq \{\underline{0}\}$.

Poichè $W \neq \{\underline{0}\}$, $\exists\ v_1 \in W$, $v_1 \neq \underline{0}$. Poniamo $\mathcal{L}_1 = \{v_1\}$.

Come nella dimostrazione del teorema di esistenza della base possiamo costruire una successione $\mathcal{L}_i$ di insiemi di i vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \ldots \subseteq W$$

e il processo si arresta quando $\mathcal{L}_k$ è un sistema di generatori, cioè una base di W.

Si noti che $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{L}_k$ è una base di W altrimenti per $i > n$, $\mathcal{L}_i$ è un insieme di $i > n$ vettori linearmente indipendenti, una contraddizione con il lemma di Steinitz.

Ma allora W ha dimensione finita e $\mathcal{L}_k$ è una base di W. Come già notato, per il lemma di Steinitz $|\mathcal{L}_k| \leq n$, cioè $\dim(W) \leq n = \dim(V)$.

2) $\Leftarrow$) ovvio

$\Rightarrow$) Supponiamo $\dim(W) = n$ e sia $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base di W. Ma $w_1, \ldots, w_n$ sono anche vettori linearmente indipendenti di V. Poichè $\dim(V) = \dim(W) = n$, $\mathcal{B}$ è anche una base di V. In particolare:

$$W \underset{\uparrow}{=} \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \underset{\uparrow}{=} V \implies W = V.$$

$\mathcal{B}$ base di W $\Rightarrow w_1, \ldots, w_n$ generano W

$\mathcal{B}$ base di V $\Rightarrow w_1, \ldots, w_n$ generano V

Osservazione: Se W è un sottospazio tale che $\dim(W)=0$, allora $W=\{\underline{0}\}$

Def: Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora l'intero

$$\dim(V)-\dim(W)$$

si dice codimensione di W in V.

In un certo senso la codimensione misura quanto un sottospazio W di V è "lontano" da V.

Abbiamo la seguente formula che, dati due sottospazi $U,W \subseteq V$, mette in relazione $\dim(U)$, $\dim(W)$, $\dim(U\cap W)$, $\dim(U+W)$.

Teorema (FORMULA DI GRASSMANN)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano U, W due sottospazi di V.

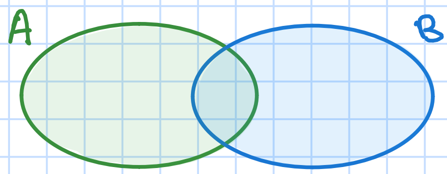
Allora $U\cap W$ e $U+W$ hanno dimensione finita e

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W).$$

In particolare, se $U\oplus W$ è somma diretta, allora $\dim(U\cap W)=0$ e

$$\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W).$$

Osservazione: La formula di Grassmann è l'analoga della formula della cardinalità dell'unione di due insiemi:



$$|A\cup B| = \underbrace{|A|+|B|} - |A\cap B|$$

in questa somma gli elementi dell'intersezione sono contati due volte. Una volta per A e una volta per B.

Esempio

Utilizziamo la formula di Grassmann per rispondere alla domanda seguente

Sia $V = \mathbb{R}^5$ e siano U, W due sottospazi di dimensione 3.
Si può avere $V = U \oplus W$?

Sappiamo:

1) $\dim(U) = 3$
2) $\dim(W) = 3$
3) $U + W \subseteq \mathbb{R}^5 \Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim(\mathbb{R}^5) = 5$

Usiamo la formula di Grassmann per ottenere informazioni sulla dimensione dell'intersezione:

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) =$$
$$= 3 + 3 - \dim(U+W) \geq$$
$$\geq 3 + 3 - 5 = 1$$

$\dim(U+W) \leq 5$

Otteniamo quindi che $\dim(U \cap W) \geq 1$. In particolare $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$ (altrimenti $\dim(U \cap W) = 0$).

<u>Osservazione</u>: Se $\{u_1, \dots, u_p\}$ è un sistema di generatori di U e $\{w_1, \dots, w_q\}$ è un sistema di generatori di W, allora $\{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$ è un sistema di generatori di $U+W$.

Infatti $\forall\ \underline{x} \in U+W$, $\exists\ u \in U$ e $w \in W$ tali che

$$\underline{x} = u + w.$$

Poichè $\{u_1, \dots, u_p\}$ e $\{w_1, \dots, w_q\}$ sono sistemi di generatori rispettivamente per U e W, allora $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q \in K$ tali che

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \quad \text{e} \quad w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_q w_q.$$

Quindi

$$\underline{x} = u + w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_q w_q.$$

Ne risulta che $\{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$ è un sistema di generatori.

<u>Attenzione</u>: Se $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_W$ sono rispettivamente basi di U e W, $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un sistema di generatori di $U+W$, ma non è detto che sia una base di $U+W$.

Esempio

$V = \mathbb{R}^4$

$U = \langle (1,0,2,3), (0,1,2,2) \rangle \Rightarrow \dim(U)=2$

$W = \langle (-2,3,2,0), (0,0,0,1) \rangle \Rightarrow \dim(W)=2$

Problema: determinare una base di $U+W$ e $U\cap W$.

- $U,W \subseteq U+W \subseteq \mathbb{R}^4 \Rightarrow 2 \leq \dim(U+W) \leq 4.$

Per ogni possibile valore di $\dim(U+W)$ la formula di Grassmann ci restituisce il valore corrispondente della dimensione di $U\cap W$.

$$\begin{array}{lccc} \dim(U+W): & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \text{ formula di Grassmann} \\ \dim(U\cap W): & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Per l'osservazione precedente l'insieme $\mathcal{G}=\{(1,0,2,3),(0,1,2,2),(-2,3,2,0),(0,0,0,1)\}$ è un sistema di generatori di $U+W$, ossia:

$$U+W=\langle (1,0,2,3),(0,1,2,2),(-2,3,2,0),(0,0,0,1)\rangle.$$

Estraiamo da $\mathcal{G}$ una base di $U+W$.

$\mathcal{L}=\{(1,0,2,3),(0,1,2,2)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Si può facilmente mostrare che non possiamo completare $\mathcal{L}$ con $(-2,3,2,0)$, in quanto $(1,0,2,3),(0,1,2,2)$ e $(-2,3,2,0)$ sono linearmente dipendenti $\left(-2(1,0,2,3)+3(0,1,2,2)=(-2,3,2,0)\right)$.

Consideriamo quindi $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}\cup\{(0,0,0,1)\}$. Si mostra facilmente che $\mathcal{L}_1$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e, per costruzione, è una base di $U+W$.

Quindi $\dim(U+W)=3$. Conseguentemente $\dim(U\cap W)=1$.

Per determinare una base di $U\cap W$ sarà sufficiente trovare un vettore non nullo appartenente sia ad U che a W.

Abbiamo già visto che $(-2,3,2,0)\in W$ appartiene anche a U (in quanto è combinazione lineare di $(1,0,2,3),(0,1,2,2)\in U$).
Quindi $\{(-2,3,2,0)\}$ è una base di $U\cap W$.

In conclusione abbiamo:

	DIMENSIONE	BASE
$U+W$	3	$\{(1,0,2,3),(0,1,2,2),(0,0,0,1)\}$
$U\cap W$	1	$\{(-2,3,2,0)\}$

Nell'osservazione precedente abbiamo fatto notare che l'unione di due basi di U e W, non è in generale una base di $U+W$.

Tuttavia, questo è vero se $U\oplus W$ è somma diretta di U e W. Abbiamo infatti il risultato seguente.

Proposizione: Siano U, W due sottospazi di V tali che $U\cap W=\{\underline{0}\}$.
Siano $\mathcal{B}_U$ e $\mathcal{B}_W$ due basi rispettivamente di U e W. Allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di $U\oplus W$.

Dim: per esercizio.

Introduciamo ora la definizione di RANGO di un insieme di vettori che, tra le varie cose, ci permetterà di enunciare alcuni criteri di compatibilità di sistemi lineari.

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1,\dots,v_p\}$ un sottoinsieme finito di V.
Il RANGO di $\{v_1,\dots,v_p\}$ è la dimensione del sottospazio vettoriale generato da $v_1,\dots,v_p$:

$$rg(\{v_1,\dots,v_p\}) = \dim(\langle v_1,\dots,v_p\rangle).$$

Equivalentemente è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\{v_1,\dots,v_p\}$.

Esempio

Consideriamo il sottoinsieme $A=\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,1,1,0)\}$.

Notiamo che il rango di A non può essere 3, poiché i vettori di A sono linearmente dipendenti ($(0,1,1,0)=(0,1,0,0)+(0,0,1,0)$).

Il rango di A è 2 se A contiene due vettori linearmente indipendenti.

Chiaramente $(0,1,0,0)$ e $(0,0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, quindi $rg(A)=2$.

Osservazioni:

1) $0 \leq rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \leq p$.

In particolare:

$\rightarrow rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = 0 \iff v_1 = \dots = v_p = \underline{0}$.

$\rightarrow rg(\{v_1, \dots, v_p\}) = p \iff v_1, \dots, v_p$ sono linearmente indipendenti.

2) Se $\dim(V) = n$ e $v_1, \dots, v_p \in V$ allora

$$\left.\begin{array}{l} rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \underset{\text{vedi oss. precedente}}{\leq} p \\ rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \underset{\text{lemma di Steinitz}}{\leq} n. \end{array}\right\} \Rightarrow rg(\{v_1, \dots, v_p\}) \leq \min\{n, p\}.$$