LEZIONE 12 - GEOMETRIA e ALGEBRA

12/04/22

Nella lezione precedente abbiamo introdotto le seguenti definizioni:

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \dots, v_n \in V$.

- Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ generano V se $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, cioè se $\forall\, v \in V$, $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$
- Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \underline{0} \implies \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0.$$
- Diciamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se:
  1) $v_1, \dots, v_n$ generano V.
  2) $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

<u>Proposizione</u>: Sia V uno spazio vettoriale su K e $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora $\forall\, v \in K$, $\exists!\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tale che
$$(*) \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n .$$
In altre parole, se $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$ sono tali che
$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$
allora $\lambda_i = \mu_i$, $\forall\ i = 1, \dots, n$.

I coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ della combinazione lineare $(*)$ si dicono le COORDINATE di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si dice la n-upla delle coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

<u>Dim</u>

Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

La conclusione segue allora dall'esercizio 6-(d) del foglio 4.

Esempio 1

$V = \mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$

Vediamo che:

- v_1, v_2 generano $\mathbb{R}^2$. Infatti $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

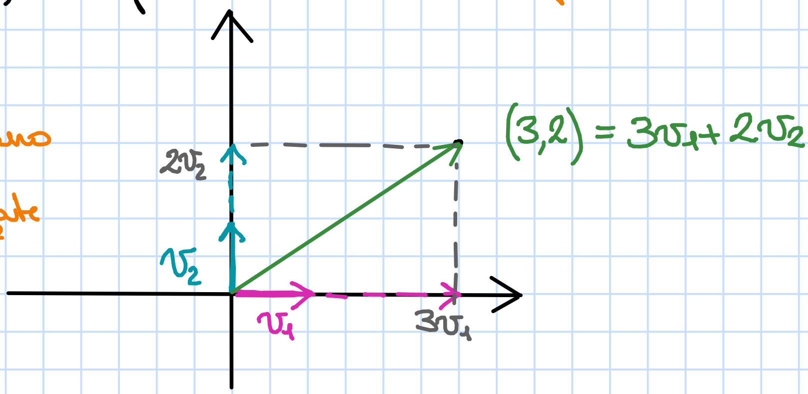
$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1).$$

- v_1, v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti se λ_1, λ_2 sono tali che:

$$\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,0) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Quindi $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e le coordinate di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ rispetto a $\mathcal{B}$ non sono altro che l'ascissa e l'ordinata di (a,b) nel piano cartesiano (coordinate cartesiane).

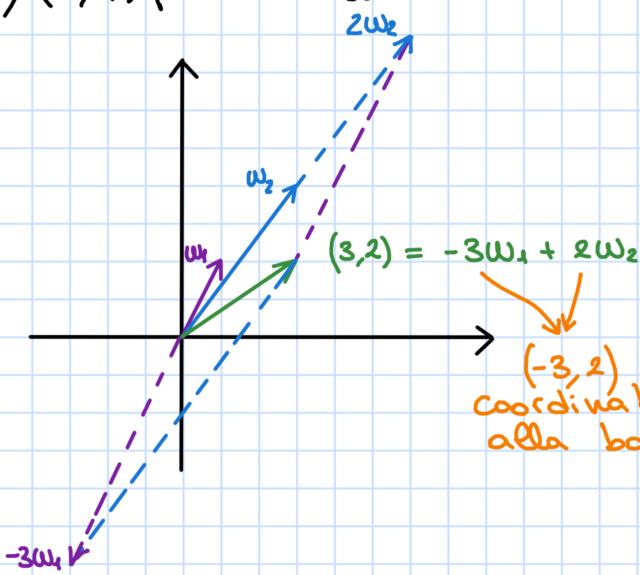
Le coordinate di un punto (a,b) nel piano cartesiano non sono altro che le coordinate del vettore $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base $\{(1,0), (0,1)\}$.



Si noti che parliamo di <u>una</u> base di $\mathbb{R}^2$, in quanto essa non è unica.

Abbiamo infatti già visto che i vettori $w_1 = (1,2)$, $w_2 = (3,4)$ generano $\mathbb{R}^2$ e sono linearmente indipendenti.

Quindi $\mathcal{B}' = \{(1,2), (3,4)\}$ è un'altra base di $\mathbb{R}^2$.



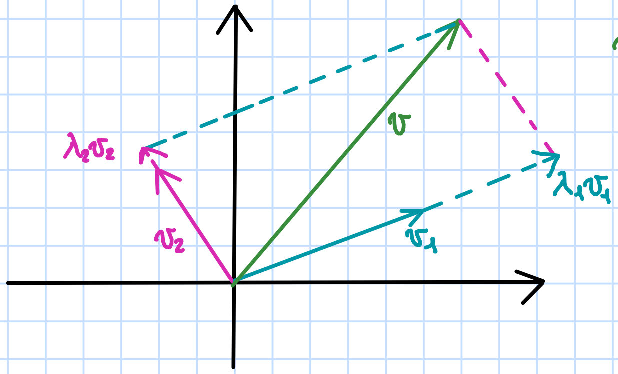
$(-3,2)$ sono le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2\}$

Def: Due vettori $v_1\, v_2 \in \mathbb{R}^2$ si dicono COLLINEARI se sono linearmente dipendenti, cioè se $\exists\ \lambda \in K$ tale che

$$v_1 = \lambda v_2 \quad o \quad v_2 = \lambda v_1 .$$

E' semplice vedere geometricamente che ogni coppia di vettori <u>non collineari</u> v_1, v_2 costituisce una base di $\mathbb{R}^2$.

$\forall\ v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, le coordinate di v rispetto a $\{v_1, v_2\}$ possono essere determinate "decomponendo" v sui vettori v_1 e v_2 (applicando, in un certo senso, la regola del parallelogramma al contrario).



$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

(λ_1, λ_2) sono le coordinate di v rispetto alla base (v_1, v_2).

Ovviamente un solo vettore v non può mai costituire una base di $\mathbb{R}^2$ in quanto v genera tutti e soli i punti della retta vettoriale $\langle v \rangle$.

Vedremo che tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ sono della forma $\{v_1, v_2\}$ con v_1, v_2 non collineari. In particolare tutte le basi di $\mathbb{R}^2$ sono costituite da 2 elementi.

Dimostriamo, più in generale, che se uno spazio vettoriale V ha una base finita (cioè con un numero finito di elementi) allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

A tale scopo ci sarà utile il lemma seguente chiamato LEMMA DI STEINITZ che, per mancanza di tempo, enunceremo senza dimostrazione:

<u>Lemma</u> (di Steinitz)

Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e siano $w_1, \dots, w_m \in V$.

$$w_1, \dots, w_m \text{ sono linearmente indipendenti} \Rightarrow m \leq n.$$

$$\Updownarrow$$

$$m > n \Rightarrow w_1, \dots, w_m \text{ sono linearmente dipendenti.}$$

Utilizziamo il lemma di Steinitz per dimostrare il teorema seguente:

Teorema (di equipotenza delle basi)

Sia V uno spazio vettoriale su K.
Siano $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{w_1, ..., w_m\}$ due basi di V. Allora $m = n$.

Dim

Poichè $\{v_1, ..., v_n\}$ è una base di V e $w_1, ..., w_m$ sono linearmente indipendenti, allora il lemma di Steinitz implica che $m \leq n$.

Poichè $\{w_1, ..., w_n\}$ è una base di V e $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti, allora il lemma di Steinitz implica che $n \leq m$.

Quindi abbiamo $m \leq n$ e $n \leq m$, quindi $m = n$.

Il teorema di equipotenza delle basi giustifica la definizione seguente:

Def: Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base finita di V.

Il numero n si dice DIMENSIONE di V e si denota con $\dim_K(V)$ (o semplicemente $\dim(V)$).

Se $V = \{\underline{0}\}$ allora si pone $\dim(V) = 0$.

Se $V = \{\underline{0}\}$ oppure V ha una base finita diciamo che V ha DIMENSIONE FINITA.

Oss: Si noti che $V = \{\underline{0}\}$ non possiede una base in quanto l'unico vettore, $\underline{0}$, è linearmente dipendente.

Esempi

1) $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, poichè abbiamo visto che $\{(1,0), (0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

2) $V = K^n$, $n \geq 1$.

Siano

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0),$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, ..., 0, 1).$$

[$\forall\, i = 1, ..., n$, e_i è il vettore con tutti zero tranne alla i-esima componente che è uguale a 1]

È facile mostrare che $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di K^n, detta BASE CANONICA di K^n.

In particolare abbiamo $\dim_K(K^n) = n$. $(\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n, \forall n \geq 1)$

Sia $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Allora

$$\underline{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

cioè la n-upla delle coordinate cartesiane di $\underline{x}$ rispetto a $\{e_1, \dots, e_n\}$ è data da $\underline{x}$ stesso.

3) Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considerianno le matrici:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a E_{11} + b E_{12} + c E_{21} + d E_{22}.$$

Inoltre si può facilmente mostrare che $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ sono linearmente indipendenti.

Quindi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ è una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, da cui:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$$

4) Più in generale, una base di $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ è $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$, dove

$$E_{ij} = (e_{hl}), \quad \text{con} \quad e_{hl} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = i \text{ e } l = j. \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare otteniamo $\dim_K \mathcal{M}_{m,n}(K) = mn$.

La base $\{E_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}$ così definita è detta base canonica di $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Sia V uno spazio vettoriale su K e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Consideriamo la funzione:

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & K^n \\ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n & \longmapsto & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{array}$$

che ad ogni vettore $v \in V$ associa la n-upla delle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

La funzione $\varphi_{\mathcal{B}}$ è biettiva (le coordinate sono univocamente determinate). Inoltre $\varphi_{\mathcal{B}}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\forall\ w_1, w_2 \in V, \quad \varphi_{\mathcal{B}}(w_1+w_2) = \varphi_{\mathcal{B}}(w_1) + \varphi_{\mathcal{B}}(w_2)$

Dim

Siano $w_1, w_2 \in V$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$ t.c.

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \quad w_2 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

Allora $\varphi_{\mathcal{B}}(w_1) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\varphi_{\mathcal{B}}(w_2) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Ora $w_1 + w_2 = (\lambda_1+\mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n+\mu_n)v_2$. Quindi abbiamo:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(w_1+w_2) = (\lambda_1+\mu_1, \dots, \lambda_n+\mu_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_n) = \varphi_{\mathcal{B}}(w_1) + \varphi_{\mathcal{B}}(w_2).$$

2) $\forall\ \lambda \in K, \forall\ w \in V, \quad \varphi_{\mathcal{B}}(\lambda w) = \lambda \varphi_{\mathcal{B}}(w)$.

Dim

Sia $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$. Allora $\varphi_{\mathcal{B}}(w) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Ora $\lambda w = (\lambda\lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda\lambda_n)v_n$. Quindi abbiamo:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(\lambda w) = (\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_n) = \lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda \varphi_{\mathcal{B}}(w).$$

Le proprietà 1 e 2 fanno di $\varphi_{\mathcal{B}}$ quella che chiameremo nella seconda parte del corso un' "applicazione lineare".
Chiamiamo $\varphi_{\mathcal{B}}$ ISOMORFISMO COORDINATO di V rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Abbiamo il teorema seguente

Teorema: Sia $V \neq \{\underline{0}\}$ e siano $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_p\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti e $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_p, \dots, v_m\}$ $(m \geq p)$ un sistema di generatori.

Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$$

linearmente indipendenti

sistema di generatori

Idea della dim

- Se $v_1, \dots, v_p$ generano V, allora $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$.
- Altrimenti si considera $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{v_{i_1}\}$, $v_{i_1} \in \mathcal{G}$, scelto in modo tale che $v_1, \dots, v_p, v_{i_1}$ siano linearmente indipendenti.

  Se $\mathcal{L}_1$ genera V allora $\mathcal{B} = \mathcal{L}_1$.
- Altrimenti si continua in modo analogo a costruire insiemi di vettori linearmente indipendenti tali che:

$$\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \dots \subseteq \mathcal{G}$$

finchè non si ottiene un sistema di generatori $\mathcal{L}_k$ tale che

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{G}.$$

Si noti che il fatto che $\mathcal{G}$ è un sistema di generatori finito garantisce che tale procedimento abbia termine.

Quindi $\mathcal{B} = \mathcal{L}_k$ è una base che soddisfa le inclusioni

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}.$$

Da questo teorema possiamo dedurre i seguenti corollari.

Corollario 1: Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale su K di dimensione finita. Allora.

1) Da qualsiasi sistema di generatori è possibile estrarre una base di V
2) È possibile completare qualsiasi insieme di vettori linearmente indipendenti a una base di V.

Corollario 2: Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n.

1) Ogni sistema di generatori di V con n elementi è una base di V.
2) Ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti è una base di V.

dim

1) Sia $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un sistema di generatori. Per il corollario 1 esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Ma $\mathcal{B}$ ha n elementi per il teorema di equipotenza delle basi. Quindi $\mathcal{B} = \mathcal{G}$.

2) Sia $\mathcal{L} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Per il corollario 1 esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$. Ma $\mathcal{B}$ ha n elementi, quindi $\mathcal{B} = \mathcal{L}$.

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e siano $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,6,9) \in \mathbb{R}^3$

Allora $\mathcal{L} = \{v_1, v_2\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti poiché v_1 e v_2 non sono collineari.

Completiamo $\mathcal{L}$ a una base di $\mathbb{R}^3$.

[Ricordiamo che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, quindi dobbiamo aggiungere a $\mathcal{L}$ solo un terzo vettore v_3 in modo tale che v_1, v_2 e v_3 siano linearmente indipendenti]

Notiamo che l'insieme $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \overbrace{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}^{\text{generano } \mathbb{R}^3}\}$ è un sistema di generatori di V.

Per il teorema esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

La dimostrazione del teorema ci offre un procedimento per determinare $\mathcal{B}$.

Consideriamo l'insieme $\{(1,2,3), (4,6,9), (1,0,0)\}$. Notiamo che $v_1, v_2, (1,0,0)$ sono linearmente dipendenti. Infatti

$$(4,6,9) - 3(1,2,3) = (1,0,0).$$

Consideriamo quindi piuttosto $\{(1,2,3), (4,6,9), (0,1,0)\}$. Si può facilmente mostrare che i vettori $(1,2,3)$, $(4,6,9)$ e $(0,1,0)$ sono linearmente indipendenti e costituiscono quindi, per il Corollario 2, una base di $\mathbb{R}^3$

Quindi $\mathcal{B} = \{(1,2,3), (4,6,9), (0,1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ che contiene $\mathcal{L}$ come richiesto.