LEZIONE 8 - GEOMETRIA e ALGEBRA

30/03/22

Nella lezione 7 abbiamo visto come si risolvono particolari tipi di sistemi, chiamati sistemi a scalini.

Per un sistema lineare generico, l'idea, ora, è di determinarne uno a scalini equivalente, cioè con lo stesso insieme di soluzioni.

Questa è proprio l'idea dietro a quello che si chiama algoritmo (o metodo di eliminazione) di Gauss-Jordan.

Tale metodo consiste nell'effettuare delle operazioni successive sulle equazioni del sistema (o equivalentemente sulle righe della matrice orlata) che non ne alterino l'insieme delle soluzioni: tali operazioni sono dette operazioni elementari.

OPERAZIONI ELEMENTARI

sulle equazioni di un sistema (sulle righe di una matrice)

Per semplicità consideriamo un sistema di 2 equazioni in n incognite:

$$(*)\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \\ a_1' x_1 + a_2' x_2 + \dots + a_n' x_n = b' \end{cases}$$

1) Il sistema (*) è equivalente al sistema in cui le due equazioni risultano scambiate:

$$\begin{cases} a_1' x_1 + a_2' x_2 + \dots + a_n' x_n = b' \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \end{cases}$$

Infatti le soluzioni di un sistema non dipendono dall'ordine in cui appaiono le equazioni.

$\Downarrow$

scambiare tra loro due equazioni di un sistema non cambia l'insieme delle soluzioni

2) Il sistema (*) è equivalente al sistema in cui un'equazione è moltiplicata per uno scalare non nullo:

$$\begin{cases} \lambda a_1 x_1 + \lambda a_2 x_2 + \dots + \lambda a_n x_n = \lambda b \\ a_1' x_1 + a_2' x_2 + \dots + a_n' x_n = b' \end{cases}, \quad \lambda \neq 0.$$

Infatti $(x_1, \dots, x_n)$ è una soluzione di $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$ se e solo se $(x_1, \dots, x_n)$ è una soluzione di $\lambda a_1 x_1 + \dots + \lambda a_n x_n = \lambda b$, $\lambda \neq 0$.

$\Downarrow$

moltiplicare (primo e secondo membro) di un'equazione di un sistema non cambia l'insieme delle soluzioni.

3) Il sistema (*) è equivalente al sistema in cui un'equazione è sostituita con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione:

$$(**)\begin{cases} a_1x_1+\dots+a_nx_n+\lambda(a_1'x_1+\dots+a_n'x_n)=b+\lambda b' \\ a_1'x_1+\dots+a_n'x_n=b' \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

se $\lambda=0$ non abbiamo effettuato nessuna operazione sul sistema

Dim

Mostriamo che $(x_1,\dots,x_n)$ è soluzione di (*) se e solo se $(x_1,\dots,x_n)$ è soluzione di (**).

- Se $(x_1,\dots,x_n)$ è soluzione di (*) allora

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n=b \quad e \quad a_1'x_1+\dots+a_n'x_n=b'$$

Ma allora:

$$\underbrace{a_1x_1+\dots+a_nx_n}_{=b}+\lambda(\underbrace{a_1'x_1+\dots+a_n'x_n}_{=b'})=b+\lambda b'$$

cioè $(x_1,\dots,x_n)$ è soluzione di (**).

- Viceversa se $(x_1,\dots,x_n)$ è soluzione di (**), allora

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n+\lambda\underbrace{(a_1'x_1+\dots+a_n'x_n)}_{=b'}=b+\lambda b'$$

e $a_1'x_1+\dots+a_n'x_n=b'$

Ma allora

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n+\lambda b'=b+\lambda b' \Rightarrow a_1x_1+\dots+a_nx_n=b$$

Quindi $(x_1,\dots,x_n)$ è soluzione di (*)

$\Downarrow$

Sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione non cambia l'insieme delle soluzioni.

Dalla discussione precedente risulta che se su un sistema si effettua una delle 3 operazioni seguenti, dette OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE EQUAZIONI DI UN SISTEMA, si ottiene un sistema equivalente:

I) SCAMBIARE tra loro due equazioni del sistema.
II) MOLTIPLICARE (primo e secondo membro) di un'equazione per uno scalare <u>non nullo</u>
III) SOSTITUIRE un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione.

Chiaramente tali operazioni si traducono in altrettante operazioni sulle righe della matrice orlata del sistema.

I) SCAMBIARE tra loro due righe della matrice

$R_i \leftrightarrow R_j$ (scambio della riga i con la riga j)

II) MOLTIPLICARE una riga della matrice per uno scalare non nullo

$R_i \leftarrow \lambda R_i$, $\lambda \neq 0$ (moltiplicare per λ la riga i)

III) SOSTITUIRE una riga della matrice con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga.

$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ (aggiungere alla riga i λ volte la riga j)

Chiamiamo I, II e III OPERAZIONI ELEMENTARI SU UNA MATRICE.

L'algoritmo di Gauss-Jordan (o il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan) non è altro che una successione di operazioni elementari che permettono di trasformare un sistema (o la corrispondente matrice orlata) in un sistema a scalini (in una matrice a scalini) equivalente al sistema di partenza.

Per rendere la notazione più concisa e compatta effettueremo l'algoritmo di Gauss-Jordan direttamente sulla matrice orlata, tenendo sempre in mente che ogni operazione sulle righe di tale matrice corrisponde a un'operazione sulle equazioni del sistema di partenza che non cambia l'insieme delle soluzioni.

<u>Partiamo da un esempio</u>

Consideriamo la matrice seguente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare una successione di operazioni elementari che "trasformi" la matrice di partenza in una matrice a scalini.

Procediamo riga per riga.
Ad ogni step identifichiamo, se esiste un pivot $\neq 0$ che utilizziamo per annullare le entrate "sottostanti"

1) Abbiamo $a_{11} = 1 \neq 0$. Utilizziamo a_{11} per annullare $a_{21} = 5$ e $a_{31} = 9$.

In questo primo step il nostro pivot è $a_{11} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 5R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 9R_1]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}$$

2) Abbiamo $a_{22} = -4 \neq 0$. Utilizziamo per annullare $a_{32} = -8$.

In questo secondo step il nostro pivot è $a_{22} = -4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a scalini}$$

In questo caso solo con operazioni di tipo III ho "trasformato" la mia matrice di partenza in una matrice a scalini.

Consideriamo un altro esempio

Vogliamo ridurre a scalini la matrice seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) In questo caso $a_{11} = 0$ e quindi non può essere usato come pivot per annullare il resto della colonna.

Quindi per prima cosa scambiamo la prima riga con una delle righe il cui primo elemento sia non nullo.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \longleftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto possiamo procedere come nell'esempio precedente e utilizzare la "nuova" prima riga per annullare l'entrata $a_{31}=2$ e $a_{41}=6$ $(a_{21}=0)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(2) } R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1]{\text{(1) } R_3 \leftarrow R_3 - \frac{2}{3}R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Ripetiamo ora gli stessi step con la "sottomatrice" evidenziata in azzurro (cioè la matrice ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna)

Abbiamo $a_{22}=-1 \neq 0$ con cui annulleremo $a_{32}=5$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{26}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Per ottenere una matrice a scalini non ci rimane che annullare $a_{43}=5$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{26}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{15}{4}R_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{26}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{59}{2} & -\frac{87}{4} \end{pmatrix}$$

a scalini

(notare che i pivots sono quelli che abbiamo utilizzato ad ogni step per annullare il resto della colonna)

ALGORITMO DI GAUSS-JORDAN

L'algoritmo di Gauss-Jordan "trasforma" una qualsiasi matrice in una matrice a scalini attraverso una successione di operazioni elementari sulle righe.

Si procede nel modo seguente (illustreremo contemporaneamente l'algoritmo su un esempio):

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Noi lavoreremo con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(0) Se $A = O_{m,n}(\mathbb{K})$ è la matrice nulla, allora restituisci A.
(la matrice nulla è a scalini)

(1) Individuo la prima colonna j non nulla di A a partire da sinistra:

$$\begin{array}{c} \quad\; j=2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad a_{1j} = 0$$

Se il primo elemento della colonna j è diverso da 0 allora vado al punto (3).

Altrimenti scambio la prima riga con una riga che abbia il j-esimo elemento diverso da 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{array}{c} \quad\text{pivot} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

In questo modo ottengo il primo pivot della futura matrice a scalini (nel nostro esempio 5).

(3) Verifico che gli elementi della colonna j sottostanti al pivot siano uguali a zero. In caso contrario, cioè se $a_{ij} \neq 0$ con $i > 1$, effettuo l'operazione seguente

$$R_i \leftarrow R_i - \frac{a_{ij}}{a_{1j}} R_1$$

pivot

pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{3}{5} R_1} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

elementi della colonna $j=2$ sottostanti al pivot

$a_{42} \neq 0$ (i, j)

$\frac{a_{ij}}{a_{ij}}$

④ Ripeto 0,1,2,3,4 utilizzando la sottomatrice ottenuta cancellando la riga del pivot e le colonne a sinistra del pivot (compresa la colonna del pivot).

riga del pivot

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

cioè mi concentro su questa parte della matrice .... $R_2 \leftrightarrow R_3$, etc..

colonne a sinistra del pivot

colonna del pivot

L'algoritmo termina quando la sottomatrice che si ottiene al punto 4 ha al più una riga

pivot 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{7}{5} R_2} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{29}{5} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + \frac{29}{20} R_3} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che ad ogni iterazione abbiamo determinato uno dei pivot della matrice a scalini finale.

<u>N.B.</u>: Il risultato dell'algoritmo di Gauss-Jordan non è unico perché dipende dalle scelte effettuate ad ogni step (ad esempio potremmo avere più modi di scambiare due righe per ottenere un pivot non nullo).

Combiniamo ora l'algoritmo di Gauss con il metodo di risoluzione di un sistema a scalini per determinare l'insieme delle soluzioni di un qualsiasi sistema lineare.

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE CON IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS-JORDAN

Supponiamo di dover risolvere un sistema lineare qualsiasi. Possiamo procedere come segue:

1. Scriviamo la matrice orlata A associata al sistema.
2. Utilizziamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per ridurre A in una matrice a scalini B.
3. Se l'ultimo pivot di B appartiene all'ultima colonna allora il sistema è incompatibile.
   Altrimenti il sistema è compatibile. Per determinarne l'insieme delle soluzioni, risolviamo il sistema a scalini associato alla matrice a scalini trovata, in quanto quest'ultimo è equivalente a quello di partenza.

ESEMPIO

Si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

1. La matrice orlata associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right).$$

2. Effettuiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan per ottenere una matrice a scalini:

= 0 quindi scambio con una riga che non comincia per zero

pivot 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 4 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

annullo il resto della colonna utilizzando il pivot 2

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

colonna nulla, vado alla colonna successiva

pivot 1

pivot 2

colonne senza pivots

③ L'ultimo pivot (1) non appartiene all'ultima colonna, quindi il sistema è compatibile.

Alla matrice a scalini trovata corrisponde il sistema a scalini:

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 4 \\ X_3 + 2X_4 = 3 \\ (0 = 0) \leftarrow \text{superfluo} \end{cases}$$

Le variabili libere sono X_2 e X_4 (corrispondenti alle colonne che non contengono pivots).

Quindi:

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_3 = 4 - 4X_2 \\ X_3 = 3 - 2X_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2X_1 = 4 - 4X_2 + 2X_3 = 10 - 4X_2 - 4X_4 \\ X_3 = 3 - 2X_4 \end{cases}$$

non dimentico di dividere per 2.

L'insieme delle soluzioni del sistema di partenza è quindi dato da:

$$\begin{cases} X_1 = 5 - 2X_2 - 2X_4 \\ X_2 = s \\ X_3 = 3 - 2X_4 \\ X_4 = t \end{cases} \Longrightarrow S = \{(10 - 2s - 2t,\ s,\ 3 - 2t,\ t),\ s,t \in \mathbb{R}\}.$$

SISTEMI LINEARI CON PARAMETRO/I

Supponiamo di avere un sistema lineare i cui coefficienti dipendono da un parametro a.

L'obiettivo è quello di studiare la compatibilità del sistema e l'insieme delle soluzioni al variare del parametro a.

Vediamo un esempio:

$$\begin{cases} aX_1 - aX_2 \qquad + X_4 = 1-a \\ X_1 - 2X_2 - X_3 \qquad = 0 \\ \qquad X_2 + aX_3 + X_4 = a-1 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \text{ matrice orlata}$$

$$\begin{pmatrix} a & -a & 0 & 1 & 1-a \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \text{(può essere effettuata } \forall a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow R_2 \leftarrow R_2 - aR_1 \quad \text{(può essere effettuata } \forall a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \text{(può essere effettuata } \forall a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & a & a & 1 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow R_3 \leftarrow R_3 - aR_2 \quad \text{(può essere effettuata } \forall a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & ?\,a-a^2 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice è a scalini e possiamo studiare la compatibilità del sistema corrispondente.

- Se $a-a^2 \neq 0$ (cioè $a \neq 0$ e $a \neq 1$) l'ultimo pivot è $a-a^2$ e non appartiene all'ultima colonna.

  Quindi il sistema è compatibile e X_4 ne è una variabile libera:

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + aX_3 = a-1-X_4 \\ (a-a^2)X_3 = 1-a^2-(1-a)X_4 \end{cases}$$

$$\Big\Downarrow \; a-a^2 \neq 0$$

$$\Downarrow \quad a-a^2 \neq 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_3 = -4 + \frac{1+a-x_4}{a} = \frac{1-3a-x_4}{a} \\ x_2 = a-1-x_4 - ax_3 = a-1-x_4-(1+a-x_4) = -2 \\ x_3 = \frac{1-a^2-(1-a)x_4}{a-a^2} = \frac{1+a-x_4}{a} \end{cases}$$

Quindi per $a \neq 0$ e $a \neq 1$ il sistema è compatibile e possiede ∞^1 soluzioni date dall'insieme:

$$S = \left\{ \left(\frac{1-3a-t}{a}, -2, \frac{1+a-t}{a}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

Restano da studiare separatamente i casi $a=0$ e $a=1$

- $a=0$

Se $a=0$ la matrice a scalini ridotta è
(qui sto semplicemente sostituendo $a=0$ nella matrice ottenuta alla fine dell'algoritmo di Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna. Quindi il sistema è compatibile e x_3 ne è una variabile libera:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = x_3 \\ x_2 + x_4 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 4 \\ x_2 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Quindi per $a=0$ il sistema è compatibile e possiede ∞^1 soluzioni date da:

$$S = \{ (t-4, -2, t, 1) : t \in \mathbb{R} \}$$

- $a=1$

Infine se $a=1$ la matrice a scalini ridotta è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ultimo pivot non appartiene all'ultima colonna, quindi il sistema è compatibile, con variabili libere x_3 e x_4.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = x_3 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

Quindi per $a=1$ il sistema è compatibile e possiede ∞^2 soluzioni date da:

$$S = \{(-s-2t, -s-t, s, t), \quad s,t \in \mathbb{R}\}$$

Ricapitolando abbiamo:

CASO	COMPAT / INCOMP.	n° SOLUZIONI	INSIEME DELLE SOLUZIONI
$a=0$	compatibile	∞^1	$\{(t-4, -2, t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$
$a=1$	compatibile	∞^2	$\{(-s-2t, -s-t, s, t), s,t \in \mathbb{R}\}$
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	compatibile	∞^1	$\{(\frac{1-3a-t}{a}, -2, \frac{1+a-t}{a}, t), t \in \mathbb{R}\}$