LEZIONE 5 - GEOMETRIA e ALGEBRA

22/03/22

Oggetti fondamentali di studio in algebra lineare sono i sistemi di equazioni lineari:

equazione lineare in n incognite: (a coefficienti reali)

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n = b$$

$$a_i \in \mathbb{R}, \ \forall\ 1 \le i \le n, \ b \in \mathbb{R}$$

sistema di m equazioni lineari in n incognite (a coefficienti reali):

$$(*) \begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n = b_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = b_m \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall\ i,j, \ b_i \in \mathbb{R}\ \forall i$

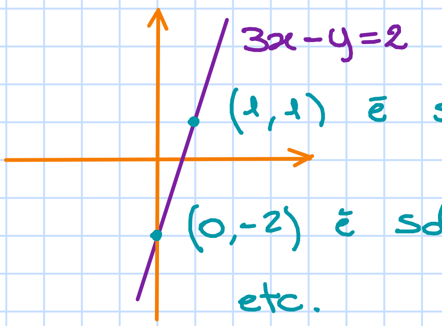
Una <u>soluzione</u> del sistema lineare (*) è un vettore $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ che verifica <u>tutte</u> le equazioni del sistema.

<u>esempio</u>: $(1,2,3)$ è una soluzione di $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1+2+3=6 \checkmark \\ 2\cdot 1-2=0 \checkmark \end{pmatrix}$

Dato un sistema lineare, vogliamo poter rispondere alle seguenti domande:

1) Il sistema ha soluzioni?
2) Se sì, "quante" sono? Come si calcolano?
3) Come possiamo interpretare geometricamente l'insieme delle soluzioni S? (Soprattutto nel caso di 2 o 3 incognite, cioè $S \subseteq \mathbb{R}^2$ o $S \subseteq \mathbb{R}^3$).

<u>esempio</u>: le soluzioni di $3x-y=2$ formano una retta nel piano



$(1,1)$ è soluzione di $3x-y=2$

$(0,-2)$ è soluzione di $3x-y=2$

etc.

Uno strumento utile per la risoluzione di sistemi lineari (ma non solo!) sono le matrici.

LE MATRICI: un (altro) esempio di spazio vettoriale, ma soprattutto uno strumento compatto e conciso per rappresentare diversi oggetti matematici, tra cui molti nel contesto dell'algebra lineare.

Sia K un campo (potete sempre immaginare $K=\mathbb{R}$)
Siano $m, n \geq 1$ due interi.

Def: Una matrice $m \times n$ a elementi in K è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di K disposti su m righe e n colonne.

esempio: $K=\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ è una matrice } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero righe}}}{2} \times \overset{\substack{\text{numero colonne} \\ \downarrow}}{3}.$$

In un certo senso le matrici sono la versione "bidimensionale" dei vettori numerici di K^n.

Notazione: Denotiamo le matrici con le lettere maiuscole.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow i\text{-esima riga}$$

$\downarrow$ j-esima colonna

In maniera più compatta possiamo scrivere

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad a_{ij} \in K$$

elemento generico: a_{ij} → j: indice di colonna, i: indice di riga

Un po' di terminologia

- Ciascuno degli elementi della matrice è detto <u>entrata</u> (o coefficiente) della matrice.

- Se $n = m$, una matrice $n \times n$ si dice <u>quadrata</u> di ordine n.
  Se A è quadrata di ordine n, gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la <u>diagonale principale</u> di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

diagonale: $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn})$

N.B.:
- ogni elemento della diagonale (principale) è della forma a_{ii} (stesso indice di riga e di colonna)
- non si parla di diagonale per matrici <u>non</u> quadrate.

- Una matrice $1 \times n$ è chiamata <u>vettore riga</u>
- Una matrice $n \times 1$ è chiamata <u>vettore colonna</u>

<u>esempio</u>:
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine 2
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ è un vettore riga 1×3
- $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ è un vettore colonna 2×1

Notazioni

$\mathcal{M}_{m,n}(K) = \{$ Matrici $m \times n$ a elementi in $K \}$

$\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K) = \{$ matrici quadrate $n \times n$ a elementi in $K \}$

<u>esempio</u>: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \pi & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Def: Siano $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. Diciamo che $A=B$ se
$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall\, i \in \{1,\dots,m\}, \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\}$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$: $A \neq B$ perché $a_{12} \neq b_{12}$.

Definiamo due operazioni su $M_{m,n}(K)$:

- SOMMA DI MATRICI

$$+ : M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{m,n}(K)$$
$$(A, B) \longmapsto A+B$$

dove $A+B \in M_{m,n}(K)$ è definita nel modo seguente:

$$A=(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=(b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$ (A e B hanno la stessa taglia)

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-3) & 2+0 & 3+4 \\ 4+5 & 5+\sqrt{2} & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 9 & 5+\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$A+C$ non è definita perché A e C non hanno la stessa taglia: $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

- MOLTIPLICAZIONE PER SCALARI

$$\cdot : K \times M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{m,n}(K)$$
$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda \cdot A$$

dove $\lambda \cdot A \in M_{m,n}(K)$ è definita nel modo seguente:

$\lambda \in K$, $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$

$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2 \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -14 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

Proprietà

1) + COMMUTATIVA : $A+B = B+A$, $\forall A,B \in M_{m,n}(K)$
2) + ASSOCIATIVA : $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\forall A,B,C \in M_{m,n}(K)$
3) ELEMENTO NEUTRO rispetto a +

$$O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ (la matrice nulla)

dove 0 è l'elemento neutro di $(K,+)$

4) OPPOSTO rispetto a +

Se $A = (a_{ij}) \Rightarrow -A = (-a_{ij})$

$-a_{ij}$ è l'opposto di a_{ij} in K.

5) $\lambda(A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$, $\forall A,B \in M_{m,n}(K)$, $\forall \lambda \in K$
6) $(\lambda+\mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$, $\forall A \in M_{m,n}(K)$, $\forall \lambda,\mu \in K$
7) $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$, $\forall A \in M_{m,n}(K)$, $\forall \lambda,\mu \in K$
8) $1 \cdot A = A$, $\forall A \in M_{m,n}(K)$.

Quindi $\forall m,n \geq 1$ $(M_{m,n}(K), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su K.

Ma le matrici sono più di un semplice spazio vettoriale. In particolare è possibile definire un'operazione di prodotto tra matrici. Tale operazione prende anche il nome di prodotto riga per colonna e ora capiamo perché.

Siano $(a_1, \dots, a_n) \in M_{1,n}(K)$ un vettore riga e $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ un vettore colonna.

Definiamo il prodotto di $(a_1,\dots,a_n)$ per $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ come lo scalare ottenuto nel modo seguente:

$$(a_1,\dots,a_n)\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_ib_i$$

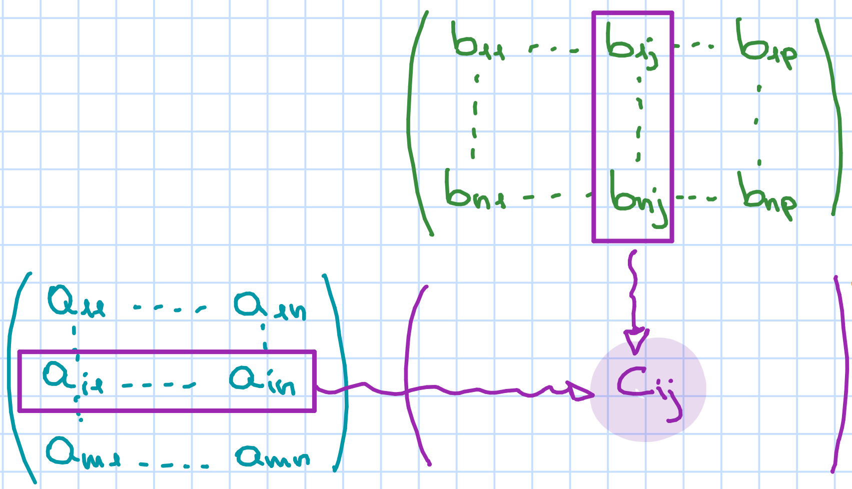
esempio : $(-1 \quad 2 \quad 5)\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\cdot 0 + 2\cdot(-3) + 5\cdot 1 = -1.$

Notiamo che questa definizione funziona solo nel caso in cui il vettore riga è costituito dallo stesso numero di elementi del vettore colonna, o in altre parole, quando il numero di colonne del vettore riga è uguale al numero di righe del vettore colonna.

Più in generale il prodotto di matrici è una funzione:

$$\cdot : \mathcal{M}_{m,n}(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K)$$
$$(A, B) \longmapsto C = AB$$

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}$



ogni entrata della matrice prodotto è il risultato del prodotto di una riga di A per una colonna di B. Poiché A ha m righe e B ha p colonne, m×p è la taglia di AB.

dove per ogni $1 \le i \le m$ e per ogni $1 \le j \le p$

$$c_{ij} := (a_{i1} \dots a_{in})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

i-esima riga di A

j-esima colonna di B

ovvero l'elemento generico c_{ij} di AB è il prodotto della i-esima riga di A e della j-esima colonna di B.

N.B : poiché per calcolare il prodotto AB dobbiamo calcolare i prodotti di righe di A per colonne di B, AB è definito se e solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Esempi

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$

B ha 4 colonne
A ha 3 righe

Posso calcolare AB (ma non BA)

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 31 & 11 & 6 & -7 \\ -5 & -5 & -2 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

② $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Notiamo che i prodotti AB e BA sono entrambi definiti, ma $AB \neq BA$.

Infatti il prodotto di matrici non è commutativo.

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Possiamo calcolare sia AB che BA, ma ottengo matrici di taglia diverse.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

Caso particolare

Quando $m=n=p$, il prodotto di matrici diventa un'operazione binaria interna su $\mathcal{M}_n(K)$:

$$\mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$$
$$(A, B) \longmapsto AB$$

che date due matrici quadrate di ordine n restituisce come risultato una matrice, anch'essa quadrata di ordine n.