Lezione 1 - GEOMETRIA e ALGEBRA

08/03/2022

Oggi: Richiami di logica, teoria degli insiemi e funzioni.

Richiami di logica

P: proposizione logica < V vero / F falso (valori di verità)

P = "Napoli è in Campania" : V

P(n) = "n è pari"

↓

P(2) : V

P(3) : F

Connettivi logici

1) negazione : $\neg$, "non"
2) congiunzione : $\wedge$, "e"
3) disgiunzione inclusiva : $\vee$, "o"
4) implicazione : $\Rightarrow$ "se ... allora ..."
5) doppia implicazione : $\Leftrightarrow$, "se e solo se"

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

$\Updownarrow$

TAVOLE DI VERITA'

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Quantificatori

$\forall$: "per ogni"

$\exists$: "esiste almeno uno"

$\exists!$: "esiste uno ed uno solo"

esempi : 1) " $\forall$ n numero naturale, n è pari" : F

" $\exists$ n numero naturale : n è pari" : V

tali che

2) $P(x)$ = { x è uno studente in aula A3-T2"

$Q(x)$ = { x è iscritto a un corso di ingegneria }

$\forall x,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$ V (a meno di intrusi)

3) $P(n)$ = " n è un numero pari"

$Q(n)$ = " n è divisibile per 4"

$\forall$ n numero naturale, $Q(n) \Rightarrow P(n)$: V

$\forall$ n " " , $P(n) \Rightarrow Q(n)$: F

infatti : $P(2)$: V $Q(2)$: F

$R(n)$ = " n è divisibile per 2"

$\forall n,\ P(n) \Leftrightarrow R(n)$: V

def. di numero pari

Importante : $P \Rightarrow Q$ è equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$

(n è divisibile per 4 $\Rightarrow$ n è pari) $\Leftrightarrow$ (n è dispari $\Rightarrow$ n non è divisibile per 4)

Teoria degli insiemi

INSIEME: collezione di oggetti, detti elementi dell'insieme.

Convenzionalmente gli insiemi si denotano con le lettere maiuscole (A, B, X, Y) e gli elementi con le lettere minuscole (a, b, x, y, ...)

Come descrivere un insieme?

1) Per elencazione (se ho un insieme finito, cioè con un numero finito di elementi)

$$A = \{\underbrace{0, 2, 4, 6, 8, 10}_{\text{elementi}}\}$$

$4 \in A$ (4 appartiene ad A)

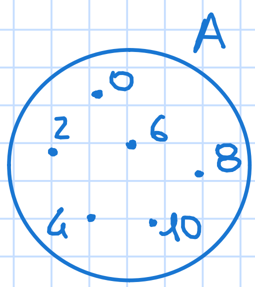
$5 \notin A$ (5 non appartiene ad A)

2) Per proprietà caratteristica

$$A = \{n \underset{\text{tali che}}{:} n \text{ è un numero pari}, \ 0 \le n \le 10\}$$

3) Graficamente

Diagramma di Eulero-Venn



Def: Sia A un insieme finito.
La cardinalità (o ordine) di A è il numero di elementi di A e si denota $|A|$

esempio: $|A| = 6$

• insieme vuoto : insieme che non contiene nessun elemento

Si denota $\emptyset$, $\{\}$

$|\emptyset| = 0$.

I principali insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: numeri naturali
?

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: numeri interi

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$: numeri razionali

$\mathbb{R}$: numeri reali

$\mathbb{C}$: numeri complessi

INCLUSIONE DI INSIEMI

• $A \subseteq B$ ("A è contenuto in B") $\iff (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$

$B \supseteq A$ ("B contiene A")

Se $A \subseteq B$, diciamo che A è un <u>sottoinsieme</u> di B,

<u>esempio</u> : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

• $A = B \iff (x \in A \iff x \in B) \iff \underbrace{(A \subseteq B \land B \subseteq A)}_{\text{doppia inclusione}}$

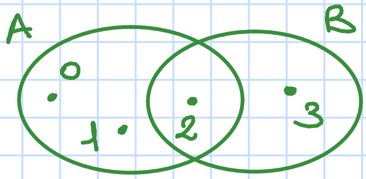
Operazioni tra insiemi

Siano A e B due insiemi

esempio

$A = \{0, 1, 2\}$

$B = \{2, 3\}$



1) INTERSEZIONE $\longleftrightarrow$ $\wedge$

$$A \cap B := \{x : x \in A \underset{\text{"e"}}{\wedge} x \in B\}$$

esempio: $A \cap B = \{2\}$

Se $A \cap B = \emptyset$ allora A e B sono detti disgiunti

Proprietà:
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \subseteq B \implies A \cap B = A$

2) UNIONE $\longleftrightarrow$ $\vee$

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

esempio: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$

Proprietà:
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \subseteq B \implies A \cup B = B$
- $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.

3) DIFFERENZA

$$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

Proprietà

$A \setminus \emptyset = A$

$\emptyset \setminus A = \emptyset$

esempio: $\left.\begin{array}{l} B \setminus A = \{3\} \\ A \setminus B = \{0, 1\} \end{array}\right\} \implies A \setminus B \neq B \setminus A$

4) PRODOTTO CARTESIANO

coppie ordinate

$A = \{0,1,2\}$

$B = \{2,3\}$

$$A \times B := \{(a,b) \; : \; a \in A, \; b \in B\}$$

esempio : $A \times B = \{(0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$

$B \times A = \{(2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2)$

$\Downarrow$

$A \times B \neq B \times A$ (poiché $(0,2) \in A \times B$, $(0,2) \notin B \times A$)

Proprietà :

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$.

$A_1, \dots, A_n$ insiemi

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \; : \; a_i \in A_i \;, \forall i\}$$

esempio

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \; : \; x, y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, \dots, x_n) \; : \; x_i \in \mathbb{R}, \; \forall i\}$

FUNZIONI

Def: Siano A, B due insiemi

Una funzione $f : A \to B$ è una legge che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

dominio

codominio

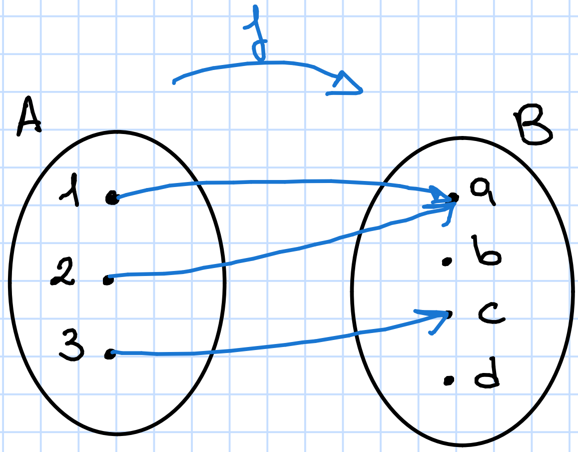
$$f : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

Se $y = f(x)$, $x \in A$, allora y è l'immagine di x
e x è una controimmagine di y

esempio

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c, d\}$



$$f : A \longrightarrow B$$
$$1 \longmapsto a$$
$$2 \longmapsto a$$
$$3 \longmapsto c$$

a è l'immagine di 1 e 2 $\quad (f(1) = a = f(2))$

1 è una controimmagine di a

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (funzioni di variabile reale e a valori reali)

$\quad x \longmapsto x^2$

$$f(2) = 4 = f(-2).$$

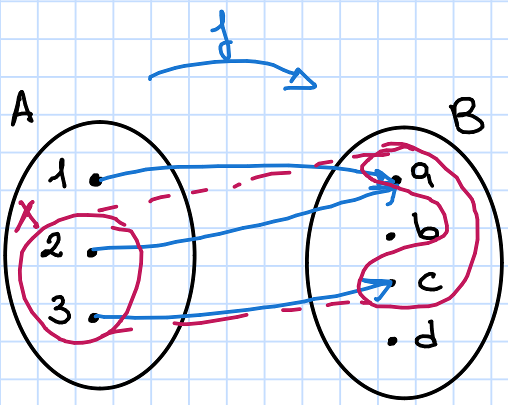
Def: Sia $f : A \to B$ una funzione e sia $X \subseteq A$.

$f(X) := \{ f(x) : x \in X \}$ è l'immagine di X tramite f.

$\mathrm{Im}(f) := f(A)$ è l'immagine della funzione

Torniamo all'esempio

$f(1) = f(2) = a \Rightarrow f$ non è iniettiva



$X = \{2, 3\}$

$f(X) = \{ f(2), f(3) \} =$
$= \{a, c\}$

$\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{ f(1), f(2), f(3) \} =$
$= \{a, c\}$

f non è suriettiva $\Leftarrow \mathrm{Im}(f) \neq B$