

Esercizi

7 - APPLICAZIONI LINEARI

Legenda:

- 😊 : Un gioco da ragazzo, dopo aver riletto gli appunti del corso
😞 : Ci devo pensare un po', ma posso arrivarci
🤪 : Non ci dormirò stanotte

😊 **Esercizio 1.** Si determinino quali tra le seguenti sono applicazioni lineari, giustificando la risposta in modo esaustivo:

- (a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x$
- (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$
- (c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $x \mapsto (2x, 0, -x)$
- (d) $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (x + 1, x + y, y - 3)$
- (e) $f_5 : \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $p(X) \mapsto (p(0), p(1))$

😊 **Esercizio 2.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$f(1, 2, -1) = (1, 0, 0, 2), \quad f(0, 1, -3) = (0, 1, 2, -5) \quad \text{e} \quad f(2, 2, 2) = (1, 2, 4, -8).$$

- (a) Si determini $f(1, 8, -17)$.
(b) Si determinino la dimensione e una base di $\ker(f)$.
(c) Si determinino la dimensione e una base di $\text{Im}(f)$.

😞 **Esercizio 3.** Si stabilisca, giustificando opportunamente la risposta, se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ che verifichi simultaneamente le condizioni seguenti:

- $f(X^2 - X) = 1$.
- $f(1) = 2$
- $f(X + 3) = 3$

- $f(X^2 + 4) = 4$

Se esiste, dire se f è unica e in tal caso determinare $f(aX^2 + bX + c)$ in funzione di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

😊 **Esercizio 4.** Si consideri l'applicazione lineare:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 3y, -x, 2x - y).$$

- Si determinino la dimensione e una base del nucleo di f .
- Si determinino la dimensione e una base dell'immagine di f .
- Si determini se f è iniettiva e/o suriettiva.

😊 **Esercizio 5.** Si consideri l'endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x + z, x + 2y + 5z, -x + 4y + 9z).$$

- Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .
- Si determini il rango di f e se ne deduca se f è iniettiva e/o suriettiva.
- Si determini una base del nucleo e dell'immagine di f .
- Sia $W = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle$. Si determini una base di $f(W)$.
- Si determini l'insieme delle controimmagini di $(1, -1, -3)$, ossia $f^{-1}(1, -1, -3) := \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = (1, -1, -3)\}$.

😊 **Esercizio 6.** Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali e siano $v \in V$ e $w \in W$ tali che $f(v) = w$. Denotiamo $f^{-1}(w)$ l'insieme delle controimmagini di w . Dimostrare che $f^{-1}(w) = v + \ker(f)$, dove $v + \ker(f) := \{v + v_1 : v_1 \in \ker(f)\}$. (Procedere per doppio contenimento.)

😊 **Esercizio 7.** Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è


$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 - k & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ k & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si determinino tutti i valori di k tali che f_k è un isomorfismo.
- (b) Per $k = 0$ si determini la matrice associata all'isomorfismo inverso f_0^{-1} rispetto alla base canonica.


 **Esercizio 8.** Si consideri l'endomorfismo


$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -3x, x + z).$$

- (a) Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ di f rispetto alla base canonica \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 .
- (b) Dopo aver verificato che $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (2, 5, 1), (0, 0, 1)\}$ è una base di \mathbb{R}^3 , si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$ del cambiamento di base dalla base \mathcal{B}' alla base \mathcal{B} .
- (c) Ricordando che $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_{\mathbb{R}^3})$, calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$ di f rispetto alla base \mathcal{B}' .

 **Esercizio 9.** Siano V e W due spazi vettoriali su K e sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

- (a) Si dimostri che se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente dipendenti.
- (b) Si mostri con un controesempio che l'implicazione inversa non è vera.
- (c) Si assuma ora che f è iniettiva. Si mostri che $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente dipendenti.
- (d) Si usi il punto (c) per dimostrare che se f è iniettiva e U è un sottospazio di V allora $\dim(f(U)) = \dim(U)$.

 **Esercizio 10.** Una matrice A si dice *diagonalizzabile* se è simile a una matrice diagonale D , ossia se esiste P invertibile tale che $A = P^{-1}DP$. Mostrare che se A è diagonalizzabile, allora per ogni $n \geq 1$ anche A^n è diagonalizzabile.

 **Esercizio 11.** Determinare se gli operatori di \mathbb{R}^3 associati alle seguenti matrici rispetto alla base canonica sono diagonalizzabili e in tal caso trovare una base diagonalizzante.


$$(a) A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$


$$(b) A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si proceda per i punti seguenti:

- Calcolare il polinomio caratteristico e determinare gli autovalori.
- Per ogni autovalore si determinino la molteplicità algebrica e geometrica e si trovi una base dell'autospazio corrispondente.
- Determinare, se esiste, una base di \mathbb{R}^3 diagonalizzante.
- Per $i = 1, 2, 3$ determinare, se esiste, una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_iP$ è diagonale.

 **Esercizio 12.** Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 tale che $f(1, 2, 1) = (1, 3, 3)$, $(1, 1, 0) \in \ker(f)$ e $(0, 1, 2)$ è un autovettore relativo all'autovalore 1. Discutere la diagonalizzabilità di f .

 **Esercizio 13.** Per $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'operatore f di \mathbb{R}^3 associato alla seguente matrice rispetto alla base canonica \mathbb{R}^3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-k & k-2 & k \end{pmatrix}$$

- Determinare gli autovalori di f in funzione di k .
- Per quali valori di k l'operatore f è diagonalizzabile?
- Per $k = 2$ calcolare A^n per ogni $n \geq 1$.

 **Esercizio 14.** Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice triangolare superiore tale che

- $a_{ii} = a_{jj}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- esistono $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $j > i$, tali che $a_{ij} \neq 0$.

Dimostrare che A non è diagonalizzabile.