Geometria e Algebra - MIS-Z

Settimo appello - Marzo - Soluzioni

13/03/2023

Nome e Cognome: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Matricola: ______________________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) I vettori $(0,1,3,-1),(1,1,-1,-1),(3,2,-1,2) \in \mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni $R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$ e $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$, otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

che ha rango 3. Ne deduciamo che i vettori $(0,1,3,-1),(1,1,-1,-1),(3,2,-1,2)$ sono linearmente indipendenti.

(b) Il triangolo nel piano $\mathbb{E}^2$ di vertici $A(1,0)$, $B(-1,0)$ e $C(0,1)$ è equilatero.

☐ **VERO**

■ **FALSO**

Giustificazione

Un triangolo ABC è equilatero se e solo se $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Nel nostro caso abbiamo $\overrightarrow{AB} = (-2,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,1)$ e $\overrightarrow{BC} = (1,1)$, quindi $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$ e $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2}$. In particolare $\|\overrightarrow{AB}\| \neq \|\overrightarrow{AC}\|$, quindi il triangolo ABC non è equilatero.

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Abbiamo

$$\det(A_k) = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 4.$$

Poiché l'equazione $-k^2 - 4 = 0$ non ha soluzioni reali, concludiamo che $\det(A_k) \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, e quindi che la matrice A_k è invertibile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(d) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Se v_1, v_2 sono due autovettori relativi all'autovalore $\lambda \in K$ allora anche $v_1 + v_2$ è un autovettore relativo all'autovalore λ.

■ **VERO**

☐ **FALSO**

Giustificazione

Se v_1, v_2 sono due autovettori relativi all'autovalore λ, allora $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$. Ma allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2),$$

ossia anche $v_1 + v_2$ è un autovettore relativo all'autovalore λ.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X_1 + kX_3 = 1 \\ kX_1 + X_3 = -1 \\ -X_2 + kX_4 = -1 \\ kX_2 + X_4 = 1 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**
$k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	SI	1	$\left\{\left(\frac{1}{1-k}, \frac{1+k}{1+k^2}, -\frac{1}{1-k}, \frac{1-k}{1+k^2}\right)\right\}$
$k = -1$	SI	∞^1	$\{\{(1+t, 0, t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$
$k = 1$	NO	0	-

Svolgimento

Consideriamo la matrice dei coefficienti A e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & k & -1 \\ 0 & k & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di k tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un'unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer.

Abbiamo

$$\det(A) = 1 - k^4 = (1 + k^2)(1 + k)(1 - k) = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ o } k = -1.$$

<u>CASO 1</u>. Sia dunque $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Applicando il metodo di Cramer otteniamo:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & k \\ 1 & k & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^3 + k^2 + k + 1}{1 - k^4} = \frac{(k+1)(k^2+1)}{(1+k^2)(1+k)(1-k)} = \frac{1}{1-k}.$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ k & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k^3 - k^2 + k + 1}{1 - k^4} = \frac{(1-k)(1+k)^2}{(1+k^2)(1+k)(1-k)} = \frac{1+k}{1+k^2}.$$

CASO 1.

$$X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & k \\ 0 & k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-k^3 - k^2 - k - 1}{1 - k^4} = \frac{-(1+k)(k^2+1)}{(1+k^2)(1+k)(1-k)} = -\frac{1}{1-k}.$$

$$X_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ k & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{k^3 - k^2 - k + 1}{1 - k^4} = \frac{(1-k)^2(k+1)}{(1+k^2)(1+k)(1-k)} = \frac{1-k}{1+k^2}$$

Quindi per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ l'insieme delle soluzioni è

$$S_k = \left\{ \left(\frac{1}{1-k}, \frac{1+k}{1+k^2}, -\frac{1}{1-k}, \frac{1-k}{1+k^2} \right) \right\}.$$

<u>**CASO 2**</u>. Se $k = -1$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$,
2. $R_2 \leftrightarrow R_4$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 3 = \mathrm{rg}(A|b)$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è compatibile ed ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo X_3 come variabile libera otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_{-1} = \{(1+t, 0, t, 1), t \in \mathbb{R}\}.$$

<u>**CASO 3**</u>. Se $k = 1$ allora la matrice orlata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

CASO 3 Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$,
2. $R_2 \leftrightarrow R_4$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

In tal caso abbiamo quindi $\mathrm{rg}(A) = 3$ e $\mathrm{rg}(A|b) = 4$. Dal teorema di Rouché–Capelli segue che il sistema è incompatibile.

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Rango e sottospazi vettoriali.**

(a) Si definisca il rango di un insieme finito di vettori di uno spazio vettoriale. Si definisca quindi il rango di una matrice.

Definizione

Il rango di un sottoinsieme finito $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V è la dimensione del sottospazio generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$. Il rango di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è definito come il rango dell'insieme dei vettori riga (o, equivalentemente dei vettori colonna) di A.

(b) Si dimostri che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile, allora A ha rango massimo, richiamando eventualmente le opportune proprietà del rango che vengono usate.

Dimostrazione

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice invertibile. Allora, per definizione, esiste $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $AA^{-1} = I_n$, dove I_n è la matrice identità di ordine n. Ma allora

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AA^{-1}) = \mathrm{rg}(I_n) = n,$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che il rango di A non cambia se si moltiplica A per una una matrice invertibile e nell'ultima uguaglianza il fatto che la matrice identità ha rango massimo. Quindi A ha rango massimo.

(c) Sia $h \in \mathbb{R}$ e sia

$$W_h = Span\{(-1,0,h,1),(3,1,1,-1),(h,1,3,0),(-4,-1,1,h)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Al variare di h si determini la dimensione di W_h.

Svolgimento

Il sottospazio W_h ha dimensione 4 se e solo se la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & h & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ h & 1 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo. Utilizzando Laplace troviamo

$$\det(A) = -h^3 + 4h^2 - 4h = -h(h^2 - 4h + 4) = -h(h-2)^2.$$

Quindi $\dim(W_h) = 4$ se e solo se $h \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.
Non rimane che determinare la dimensione di W_h nei casi $h = 0$ e $h = 2$.

- **Caso** $h = 0$. Per $h = 0$ otteniamo la matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

  1. $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$,
  2. $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1$,
  3. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
  4. $R_4 \leftarrow R_4 + R_2$,
  5. $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$,

  si ottiene la matrice a scalini $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Pertanto $\dim(W_0) = \text{rg}(A_0) = 3$.

- **Caso** $h = 2$. Per $h = 2$ otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:

  1. $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$,
  2. $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1$,
  3. $R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1$,
  4. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
  5. $R_4 \leftarrow R_4 + R_2$,

  si ottiene la matrice a scalini $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Pertanto $\dim(W_2) = \text{rg}(A_2) = 2$.

(d) Sia h_0 uno dei valori per cui W_{h_0} ha dimensione minima e sia
$$U = Span\{(1,1,1,1),(5,3,11,1)\}.$$
Si determini la dimensione e una base di $W_{h_0} + U$ e $W_{h_0} \cap U$.

Svolgimento

Abbiamo visto nel punto (c) che W_h ha dimensione minima per $h = 2$. Infatti $\dim(W_2) = 2$ e una base di W_2 è data da $\{(-1,0,2,1),(3,1,1,-1)\}$. Determiniamo la dimensione e una base di $W_2 + U$ e $W_2 \cap U$.

- Il sottopazio $W_2 + U$ è generato dall'unione delle basi di W_2 e di U, ovvero
$$W_2 + U = Span\{(-1,0,2,1),(3,1,1,-1),(1,1,1,1),(5,3,11,1)\}.$$
Per calcolare la dimensione di $W_2 + U$ basterà calcolare il rango della matrice
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$
Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti:
  1. $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1$,
  2. $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$,
  3. $R_4 \leftarrow R_4 + 5R_1$,
  4. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
  5. $R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2$,

  si ottiene la matrice a scalini $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Quindi $W_2 + U$ ha dimensione 3 e una base è $\{(-1,0,2,1),(0,1,7,2),(0,0,-4,0)\}$.

- Consideriamo ora $W_2 \cap U$. Innanzitutto, dalla formula di Grassmann abbiamo
$$\dim(W_2 \cap U) = \dim(W_2) + \dim(U) - \dim(W_2 + U) = 2 + 2 - 3 = 1.$$
Per determinare una base di $\dim(W_2 \cap U)$ basterà allora determinare un vettore non nullo appartenente all'intersezione.
Sia $v \in \dim(W_2 \cap U)$. Allora esistono $\lambda, \mu, \gamma, \delta$ tali che
$$v = \lambda(-1,0,2,1) + \mu(3,1,1,-1) = \gamma(1,1,1,1) + \delta(5,3,11,1),$$
da cui otteniamo il sistema:
$$\begin{cases} -\lambda + 3\mu - \gamma - 5\delta = 0 \\ \mu - \gamma - 3\delta = 0 \\ 2\lambda + \mu - \gamma - 11\delta = 0 \\ \lambda - \mu - \gamma - \delta = 0. \end{cases}$$
Risolvendo il sistema con il metodo di eliminazione di Gauss–Jordan otteniamo le infinite soluzioni $\lambda = 4\delta, \mu = 3\delta, \gamma = 0$. In particolare, ponendo $\delta = 1$, otteniamo $\lambda = 4, \mu = 3$ (o, equivalentemente $\gamma = 0, \delta = 1$) che restituiscono l'elemento
$$v = 4(-1,0,2,1) + 3(3,1,1,-1) = 0 \cdot (1,1,1,1) + (5,3,11,1) = (5,3,11,1).$$
Quindi $W_2 \cap U = Span\{(5,3,11,1)\}$

ESERCIZIO 4 [7 punti]. **Una famiglia di endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.**

Per $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (kx+y+z, x+ky+z, x+y+kz). \end{array}$$

(a) Si determinino tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui f_k non è suriettiva e per ciascuno di essi si determini una base di $\mathrm{Im}(f_k)$.

Svolgimento

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. Dall'espressione di f_k abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Allora f_k <u>non</u> è suriettiva se e solo se $\mathrm{rg}(A_k) < 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) = 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2),$$

quindi f_k non è suriettiva se e solo se $k \in \{-2, 1\}$.

- Per $k = -2$ abbiamo

$$\mathrm{Im}(f_{-2}) = Span\{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\} = Span\{(-2,1,1),(1,-2,1)\},$$

  in quanto $(1,1,-2) = -(-2,1,1) - (1,-2,1)$.
- Per $k = 1$ abbiamo

$$\mathrm{Im}(f_1) = Span\{(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)\} = Span\{(1,1,1)\}.$$

(b) Per $k = 1$, si determini se f_1 è diagonalizzabile e in caso affermativo si trovi una base diagonalizzante.

Svolgimento

Per $k = 1$ abbiamo

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x + y + z, x + y + z). \end{array}$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a f_1 rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare se f_1 è diagonalizzabile, cominciamo con il determinare gli autovalori di f_1, trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 1-T & 1 & 1 \\ 1 & 1-T & 1 \\ 1 & 1 & 1-T \end{vmatrix} = -T^3 + 3T^2 = -T^2(T-3).$$

Pertanto gli autovalori di f_1 sono 0 e 3 con molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_0(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$

- $V_3(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(1, 1, 1)\}.$

Poiché $\dim(V_0(f_1)) = 2$, la moltiplicità algebrica e geometrica di 0 coincidono. Ne segue che l'operatore f è diagonalizzabile e l'unione delle basi dei due autospazi $V_0(f_1)$ e $V_3(f_1)$

$$\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

è una base diagonalizzante per f_1.

(c) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si mostri che $k-1$ è un autovalore di f_k e se ne determini l'autospazio corrispondente.

Svolgimento

Per mostrare che $k-1$ è un autovalore di f_k per ogni $k \in \mathbb{R}$, basterà far vedere che $k-1$ è una radice del polinomio caratteristico, ossia che la matrice $A_k - (k-1)I_3$ ha determinante nullo:

$$\det(A_k - (k-1)I_3) = \begin{vmatrix} k-(k-1) & 1 & 1 \\ 1 & k-(k-1) & 1 \\ 1 & 1 & k-(k-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Inoltre abbiamo che l'autospazio corrispondente all'autovalore $k-1$ è

$$V_{k-1}(f_k) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Span\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}.$$

ESERCIZIO 5 [7 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $A(1,1,4)$, $B(-1,-2,0)$ e $C(1,0,2)$ di $\mathbb{E}^3$.

Svolgimento

Per scrivere le equazioni parametriche di π abbiamo bisogno di un punto del piano e di due vettori non collineari della giacitura. Scegliamo:

- Punto: $C(1,0,2)$;
- Vettori non collineari della giacitura: $\overrightarrow{AB}=(-2,-3,-4)$ e $\overrightarrow{AC}=(0,-1,-2)$.

Quindi

$$\pi : \begin{cases} x=-2s+1 \\ y=-3s-t \\ z=-4s-2t+2 \end{cases}, \qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana di π ricaviamo s e t dalle prime due equazioni e le sostituiamo nell'ultima:

$$\begin{cases} s=\frac{1-x}{2} \\ t=\frac{-3+3x}{2}-y \\ z=-4\frac{1-x}{2}-2\left(\frac{-3+3x}{2}-y\right)+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=\frac{1-x}{2} \\ t=\frac{-3+3x}{2}-y \\ z=2x-2+3-3x+2y+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s=\frac{1-x}{2} \\ t=\frac{-3+3x}{2}-y \\ z=-x+3+2y \end{cases} \Rightarrow x-2y+z-3=0.$$

Un'equazione cartesiana di π è quindi:

$$\pi : X-2Y+Z-3=0.$$

(b) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si determini la posizione reciproca della retta r_h e del piano π, dove r_h è definita dalle equazioni cartesiane

$$r_h : \begin{cases} X + Y - h = 0 \\ 3X + hZ - 5 = 0 \end{cases} .$$

Per i valori di h per cui r_h e π sono incidenti si determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Ricordiamo che una retta e un piano possono essere paralleli (disgiunti o la retta contenuta nel piano) o incidenti. In particolare sono paralleli disgiunti se la loro intersezione è vuota, sono incidenti se la loro intersezione è costituita da un unico punto e la retta è contenuta nel piano se la loro intersezione è costituita da infiniti punti. Studiamo quindi, al variare di h, il numero delle soluzioni del sistema

$$(\star) : \begin{cases} X - 2Y + Z = 3 \\ X + Y = h \\ 3X + hZ = 5 \end{cases} ,$$

o, equivalentemente, il rango della matrice dei coefficienti A e della matrice orlata $(A|b)$ corrispondenti al sistema $(\star)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & h \\ 3 & 0 & h & 5 \end{pmatrix}.$$

Effettuando nell'ordine le operazioni seguenti su $(A|b)$:

1. $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$,
2. $R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$,

si ottiene la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & h-3 \\ 0 & 0 & h-1 & -2h+2 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

- se $h \neq 1$ abbiamo $\operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(A|b)$. Quindi in tal caso il sistema $(\star)$ possiede un'unica soluzione e, equivalentemente, la retta r_h e il piano π sono incidenti. Risolvendo il sistema si ottiene che il punto di intersezione è $\left(\frac{2h+5}{3}, \frac{h-5}{3}, -2\right)$, per ogni $h \neq 1$.
- se $h = 1$ abbiamo $\operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{rg}(A|b)$. Quindi in tal caso il sistema $(\star)$ possiede ∞^1 soluzioni e, equivalentemente, la retta r_1 è contenuta nel piano π.

(c) Per uno dei valori $h_0 \in \mathbb{R}$ tale che la retta r_{h_0} è parallela a π, si determini il piano π' ortogonale al piano π e passante per la retta r_{h_0}

Svolgimento

Sia $h_0 = 1$. Allora

$$r_1 : \begin{cases} X + Y = 1 \\ 3X + Z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Per determinare le equazioni parametriche del piano π' basta determinare due vettori non collineari della giacitura e un punto appartenente al piano. Poiché π' è ortogonale a π e passa per la retta r_1, prendiamo un vettore direttore di r_1, un vettore normale a π e un punto di r_1.

Dalle equazioni cartesiane ricaviamo le equazioni parametriche di r_1, che sono date da

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = -3t + 5 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Quindi un vettore direttore di r_1 è $(1, 1, -3)$, e $(0, 1, 5)$ è un punto di r_1. Inoltre poiché π ha equazione cartesiana $X - 2Y + Z - 3 = 0$, un vettore normale a π è $(1, -2, 1)$. Possiamo quindi scrivere π' in forma parametrica:

$$\pi' : \begin{cases} x = t + s \\ y = -t - 2s + 1 \\ z = -3t + s5 \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$