Geometria e Algebra - MIS-Z

Sesto appello - Febbraio

07/02/2023

Nome e Cognome: ______________________

Corso di laurea: ______________________

Matricola: ______________________

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) La funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \to & (x+1, y, z-2) \end{array}$$

è un'applicazione lineare.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(b) Il vettore $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a $Span\{(1,2,-1),(3,-1,-1)\}$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(c) Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ le rette

$$r : 3X + Y - 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad s : X - 3Y = 0$$

sono ortogonali.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

(d) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Se f è suriettiva, allora $m \leq n$.

☐ **VERO**

☐ **FALSO**

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X_2 + kX_4 = 0 \\ -X_1 + kX_3 = -1 \\ X_2 - X_4 = 4 \\ -X_1 + 2X_2 + kX_3 = 3 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il "numero" delle soluzioni e l'insieme delle soluzioni. Si riassuma quanto trovato nella tabella seguente:

k	**Compatibile?**	**Numero di soluzioni**	**Insieme delle soluzioni**

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.**

(a) Si enunci il teorema spettrale.

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x - y + kz, -kx + y, x + kz). \end{array}$$

(b1) Si determinino i valori di k per cui $\mathrm{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$.

(b2) Per $k = 1$ si spieghi perché l'operatore f_1 è diagonalizzabile e si determini una base diagonalizzante per f_1 e ortornomale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}_3$.

(b3) Sia A_1 la matrice associata a f_1 rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che

$$^{T}PA_1P = D$$

dove $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale, e si verifichi la risposta calcolando il prodotto di matrici.

ESERCIZIO 4 [8 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio $\mathbb{E}^3$ con il riferimento cartesiano standard.

(a) Si mostri che i punti $A(1,3,-1), B(-1,1,-3)$ e $C(0,2,-2)$ di $\mathbb{E}^3$ sono allineati e si determini la retta r che li contiene.

(b) Al variare di h in $\mathbb{R}$ si consideri la retta s_h descritta dalle equazioni cartesiane

$$s_h : \begin{cases} Y + Z = -h \\ -X + hY = 3 \end{cases}$$

e si determini la posizione reciproca di r e s_h. Inoltre, quando r e s_h sono incidenti, se ne determini il punto di intersezione.

(c) Per uno dei valori di h per cui r e s_h sono complanari, si determini il piano π che le contiene entrambe.

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Matrici e sottospazi vettoriali.**

(a) Enunciare il teorema di Binet.

(b) Utilizzando il fatto che una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, dimostrare l'asserto seguente:

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A e B sono invertibili se e solo se AB è invertibile.

(c) Si determini se l'insieme delle matrici invertibili di taglia 2×2 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(d) Si richiama che la *traccia* di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale. In altre parole per $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la traccia di A è data da

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Si mostri che l'insieme delle matrici 2×2 di traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se ne determini una base e la dimensione.