

Geometria e Algebra - MIS-Z

Sesto appello - Febbraio - Soluzioni

07/02/2023

Nome e Cognome: _____

Corso di laurea: _____

Matricola: _____

Informazioni

Questo appello contiene 5 esercizi per un totale di 34 punti. Il punteggio ottenuto x sarà convertito in 30esimi nella maniera seguente:

- se $x \leq 30$, allora x sarà il voto in 30esimi;
- se $30 < x \leq 34$, allora il voto sarà 30 e Lode.

Le risposte devono essere opportunamente giustificate per ottenere il punteggio massimo. Le risposte indecifrabili non verranno valutate.

Il tempo a disposizione è di 3 ore. È vietato l'utilizzo di ogni tipo di calcolatrice.

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	

TOTALE

--

ESERCIZIO 1 [6 punti]. **Vero o Falso?**

Per ciascun asserto si stabilisca se è vero o falso, motivando in modo conciso ed esauriente la risposta.

(a) La funzione

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (x + 1, y, z - 2)$$

è un'applicazione lineare.

VERO

FALSO

Giustificazione

Si ha $f(0, 0, 0) = (1, 0, -2)$. Poiché $f(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$, f non è un'applicazione lineare.

(b) Il vettore $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ appartiene a $\text{Span}\{(1, 2, -1), (3, -1, -1)\}$.

VERO

FALSO

Giustificazione

Poiché $(1, 2, -1)$ e $(3, -1, -1)$ sono linearmente indipendenti, il vettore $(1, 0, 0)$ appartiene a $\text{Span}\{(1, 2, -1), (3, -1, -1)\}$ se e solo se $(1, 0, 0)$, $(1, 2, -1)$ e $(3, -1, -1)$ sono linearmente dipendenti. Abbiamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

quindi $(1, 0, 0)$, $(1, 2, -1)$ e $(3, -1, -1)$ sono linearmente indipendenti e di conseguenza $(1, 0, 0) \notin \text{Span}\{(1, 2, -1), (3, -1, -1)\}$.

(c) Nel piano euclideo \mathbb{E}^2 le rette

$$r : 3X + Y - 2 = 0 \quad \text{e} \quad s : X - 3Y = 0$$

sono ortogonali.

VERO

FALSO

Giustificazione

Dalle equazioni cartesiane si deducono i vettori normali a r e a s , che sono rispettivamente $(3, 1)$ e $(1, -3)$. Poiché $\langle (3, 1), (1, -3) \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$, concludiamo che r e s sono ortogonali.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare. Se f è suriettiva, allora $m \leq n$.

VERO

FALSO

Giustificazione

Se f è suriettiva allora $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$. Quindi per il teorema del rango abbiamo

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\ker(f)) + m \geq m,$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che $\dim(\ker(f)) \geq 0$. Concludiamo che $n \geq m$.

ESERCIZIO 2 [6 punti]. **Sistema con parametro.**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si discuta la compatibilità del sistema

$$\begin{cases} X_2 + kX_4 = 0 \\ -X_1 + kX_3 = -1 \\ X_2 - X_4 = 4 \\ -X_1 + 2X_2 + kX_3 = 3 \end{cases}$$

e, quando il sistema è compatibile, se ne determinino il “numero” delle soluzioni e l’insieme delle soluzioni. Si riassume quanto trovato nella tabella seguente:

k	Compatibile?	Numero di soluzioni	Insieme delle soluzioni
$k = 1$	SI	∞^1	$\{(t+1, 2, t, -2), t \in \mathbb{R}\}$
$k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	NO	0	-

Svolgimento

Consideriamo la matrice dei coefficienti A e la matrice orlata $(A|b)$ associate al sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & k & 0 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & k & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo innanzitutto i valori di k tali che $\det(A) \neq 0$. Infatti per tali valori avremo $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$ e quindi, per Rouché–Capelli, il sistema sarà compatibile ed ammetterà un’unica soluzione che determineremo con il metodo di Cramer.

Con il metodo di Laplace si calcola facilmente che $\det(A) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Pertanto il sistema o risulterà incompatibile o ammetterà infinite soluzioni. Procediamo quindi con la riduzione di Gauss–Jordan della matrice orlata.

Effettuando nell’ordine le operazioni seguenti:

1. $R_1 \leftrightarrow R_2$,
2. $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$,
3. $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$,
4. $R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2$,

si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2k & 4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto dobbiamo distinguere due casi, $k \neq -1$ e $k = -1$.

CASO 1. Se $k \neq -1$ allora possiamo effettuare un'ulteriore operazione per rendere la matrice a scalini. Con l'operazione $R_4 \leftarrow R_4 - \frac{2k}{1+k}R_3$ (definita appunto quando $k \neq -1$), si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-k & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4(1-k)}{1+k} \end{pmatrix}.$$

Notiamo quindi subito che se $k \neq -1$ e $k \neq 1$ il sistema non è compatibile, poiché in tal caso la matrice dei coefficienti ha rango 3 e la matrice orlata ha rango 4.

Per $k = 1$ la matrice a scalini è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In tal caso sia la matrice dei coefficienti che la matrice orlata hanno rango 3. Quindi il sistema possiede $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Scegliendo X_3 come variabile libera otteniamo l'insieme di soluzioni

$$S_1 = \{(t+1, 2, t, -2), t \in \mathbb{R}\}.$$

CASO 2. Se $k = -1$ allora con le operazioni 1,2,3,4 si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La terza riga corrisponde all'equazione $0 = 4$, pertanto per $k = -1$ il sistema non è compatibile.

In conclusione il sistema è compatibile se e solo se $k = 1$ e in tal caso l'insieme delle soluzioni è

$$S_1 = \{(t+1, 2, t, -2), t \in \mathbb{R}\}.$$

ESERCIZIO 3 [8 punti]. **Un endomorfismo di \mathbb{R}^3 .**

(a) Si enunci il teorema spettrale.

Teorema

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo simmetrico di V , allora esiste una base ortonormale di V e diagonalizzante per f .

(b) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - y + kz, -kx + y, x + kz).$$

(b1) Si determinino i valori di k per cui $\text{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$.**Svolgimento**

Sia A_k la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 . Dall'espressione di f_k abbiamo

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Allora $\text{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$ se e solo se $\text{rg}(A_k) = 3$, ovvero se e solo se $\det(A_k) \neq 0$. Abbiamo

$$\det(A_k) = k - k^2 = k(1 - k),$$

quindi $\text{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3$ se e solo se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- (b2) Per $k = 1$ si spieghi perché l'operatore f_1 è diagonalizzabile e si determini una base diagonalizzante per f_1 e ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^3 .

Svolgimento

Per $k = 1$ abbiamo

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, -x + y, x + z).$$

Sia \mathcal{B} la base canonica di \mathbb{R}^3 (si ricorda che \mathcal{B} è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto al prodotto scalare standard). La matrice associata a f_1 rispetto a \mathcal{B} è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché A_1 è una matrice simmetrica, l'operatore f_1 è simmetrico ed è quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale.

Per determinare una base ortonormale di V e diagonalizzante per f_1 , cominciamo con il determinare gli autovalori di f_1 , trovando le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{vmatrix} 2 - T & -1 & 1 \\ -1 & 1 - T & 0 \\ 1 & 0 & 1 - T \end{vmatrix} = -T^3 + 4T^2 - 3T = -T(T - 1)(T - 3).$$

Pertanto gli autovalori di f_1 sono 0, 1 e 3, tutti di molteplicità algebrica 1. Per ognuno di essi determiniamo l'autospazio corrispondente:

- $V_0(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\{(1, 1, -1)\}.$
- $V_1(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\{(0, 1, 1)\}.$
- $V_3(f_1) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}\{(2, -1, 1)\}.$

Sia $\mathcal{B}' = \{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 1)\}$ l'unione delle basi dei tre autospazi $V_0(f_1)$, $V_1(f_1)$ e $V_3(f_1)$. Allora \mathcal{B}' è una base diagonalizzante per f_1 . Inoltre \mathcal{B}' è ortogonale in quanto gli autovalori di f_1 sono tutti distinti. Per ottenere da \mathcal{B}' una base \mathcal{B}'' diagonalizzante per f_1 e ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di \mathbb{R}^3 basterà dividere ciascun vettore di \mathcal{B}' per la sua norma. Quindi abbiamo:

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{(1, 1, -1)}{\|(1, 1, -1)\|}, \frac{(0, 1, 1)}{\|(0, 1, 1)\|}, \frac{(2, -1, 1)}{\|(2, -1, 1)\|} \right\} \\ = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

- (b3) Sia A_1 la matrice associata a f_1 rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 . Si determini una matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che

$${}^T P A_1 P = D$$

dove $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale, e si verifichi la risposta calcolando il prodotto di matrici.

Svolgimento

Sia \mathcal{B} la base canonica di \mathbb{R}^3 e sia \mathcal{B}'' la base ortonormale diagonalizzante trovata al punto (b2). Allora una matrice P tale che ${}^T P A_1 P$ è diagonale è data dalla matrice $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}$ del cambiamento di base da \mathcal{B}'' a \mathcal{B}' . Quindi

$$P = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

Essendo P la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali di \mathbb{R}^3 , P è ortogonale, ossia $P^{-1} = {}^T P$.

Effettuando il prodotto di matrici, si verifica con qualche conto che

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 4 [8 punti]. **Geometria nello spazio.**

Si consideri lo spazio \mathbb{E}^3 con il riferimento cartesiano standard.

- (a) Si mostri che i punti $A(1, 3, -1)$, $B(-1, 1, -3)$ e $C(0, 2, -2)$ di \mathbb{E}^3 sono allineati e si determini la retta r che li contiene.

Svolgimento

Abbiamo $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$. Poiché $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, ovvero \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} sono collineari, i punti A , B e C sono allineati.

Scriviamo le equazioni parametriche di r utilizzando \overrightarrow{AC} e A :

$$r : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -t + 3 \\ z = -t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Al variare di h in \mathbb{R} si consideri la retta s_h descritta dalle equazioni cartesiane

$$s_h : \begin{cases} Y + Z = -h \\ -X + hY = 3 \end{cases}$$

e si determini la posizione reciproca di r e s_h . Inoltre, quando r e s_h sono incidenti, se ne determini il punto di intersezione.

Svolgimento

Innanzitutto determiniamo le equazioni cartesiane di r , ricavando t dall'ultima equazione e sostituendola nelle prime due:

$$\begin{cases} t = -z - 1 \\ x = z + 2 \\ y = z + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -z - 1 \\ x - z = 2 \\ y - z = 4. \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di r sono quindi:

$$r : \begin{cases} X - Z = 2 \\ Y - Z = 4. \end{cases}$$

Sia dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -h \\ -1 & h & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti delle equazioni cartesiane di r e s_h . Utilizzando il metodo di Laplace per il calcolo del determinante otteniamo:

$$\det(A) = h^2 - 5h + 6 = (h - 2)(h - 3).$$

Ne deduciamo che r e s_h sono sghembe se e solo se $h \neq 2$ e $h \neq 3$.

Per $h = 2$ o $h = 3$ le rette r e s_h sono complanari, e in base al loro numero di intersezioni determiniamo se sono incidenti, parallele disgiunte o parallele coincidenti.

- Sia $h = 2$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} X - Z = 2 \\ Y - Z = 4 \\ Y + Z = -2 \\ -X + 2Y = 3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene l'unica soluzione $(-1, 1, -3)$. Quindi le rette r e s_2 sono incidenti e si intersecano nel punto $(-1, 1, -3) \in \mathbb{E}^3$.

- Sia $h = 3$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} X - Z = 2 \\ Y - Z = 4 \\ Y + Z = -3 \\ -X + 3Y = 3 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene l'unica soluzione $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$. Quindi le rette r e s_3 sono incidenti e si intersecano nel punto $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \in \mathbb{E}^3$.

- (c) Per uno dei valori di h per cui r e s_h sono complanari, si determini il piano π che le contiene entrambe.

Svolgimento

Consideriamo il caso $h = 2$. La retta s_2 ha equazioni cartesiane:

$$s_2 : \begin{cases} Y + Z = -2 \\ -X + 2Y = 3 \end{cases}$$

Per determinare il piano π contenente r e s_2 basterà determinare tre punti non allineati che appartengono al piano. Ad esempio possiamo prendere un punto di r , un punto di s_2 e il punto di intersezione di r e s_2 . Quindi scegliamo $P_1(1, 3, -1) \in r$, $P_2(-3, 0, -2) \in s_2$ e $P_3(-1, 1, -3)$.

Allora il piano π ha giacitura $\text{Span}\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\} = \text{Span}\{(-4, -3, -1), (-2, -2, -2)\}$ e passa per il punto P_1 . Deduciamo quindi che π ha equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = -4s - 2t + 1 \\ y = -3s - 2t + 3 \\ z = -s - 2t - 1 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 5 [6 punti]. **Matrici e sottospazi vettoriali.**

- (a) Enunciare il teorema di Binet.

Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. In altre parole il determinante del prodotto di due matrici quadrate è uguale al prodotto dei loro determinanti.

- (b) Utilizzando il fatto che una matrice
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- è invertibile se e solo se
- $\det(A) \neq 0$
- , dimostrare l'asserto seguente:

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora A e B sono invertibili se e solo se AB è invertibile.

Dimostrazione

\Rightarrow) Se A e B sono invertibili, allora $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Per il teorema di Binet si ha $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, quindi $\det(AB) \neq 0$ in quanto è prodotto di due numeri reali non nulli. Ne segue che AB è invertibile.

\Leftarrow) Se AB è invertibile allora $\det(AB) \neq 0$. Dal teorema di Binet segue che $\det(A) \det(B) \neq 0$, quindi $\det(A)$ e $\det(B)$ sono entrambi non nulli (altrimenti il loro prodotto sarebbe uguale a zero). Concludiamo che A e B sono invertibili.

- (c) Si determini se l'insieme delle matrici invertibili di taglia 2×2 è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Svolgimento

Sia $W = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A \text{ è invertibile}\}$. Il sottoinsieme W non è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$$

poiché la matrice nulla ha determinante uguale a zero e quindi non è invertibile.

- (d) Si richiama che la *traccia* di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale. In altre parole per $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la traccia di A è data da

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Si mostri che l'insieme delle matrici 2×2 di traccia nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se ne determini una base e la dimensione.

Svolgimento

Consideriamo l'insieme

$$U := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + d = 0 \right\}.$$

Mostriamo innanzitutto che U soddisfa le proprietà di sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Si ha $U \neq \emptyset$, poiché la traccia di $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è uguale a zero e quindi $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$.
- Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e siano $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ due matrici in U . Allora $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$, ossia $a_1 + d_1 = a_2 + d_2 = 0$. Si ha

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu a_2 & \lambda b_1 + \mu b_2 \\ \lambda c_1 + \mu c_2 & \lambda d_1 + \mu d_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda a_1 + \mu a_2 + \lambda d_1 + \mu d_2 = \lambda(a_1 + d_1) + \mu(a_2 + d_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0,$$

da cui segue che $\lambda A + \mu B \in U$.

Concludiamo che U è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determiniamo ora una base e la dimensione di U . Osserviamo che:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Si mostra facilmente che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti,

quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U e U ha dimensione 3.