Passerelle pour les maths
Licences de mathématiques et d'informatique

7-23 septembre 2016

1 Calculs dans $\mathbb{R}$

1.1 Fractions

Exercice 1 Pour $a = 4/9$ et $b = 5/12$, calculer $a + b,\ a - b,\ ab$ et a/b. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations

$$\frac{2}{-5x+1} + \frac{-3}{4x+3} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{-7x}{7x+2} = \frac{x}{-x+1} \tag{2}$$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations

$$\frac{2}{-5x+1} + \frac{-3}{4x+3} > 0 \tag{3}$$

$$\frac{-7x}{7x+2} < \frac{x}{-x+1} \tag{4}$$

1.2 Développer et factoriser

Exercice 4 Soient a et b deux réels, factoriser les expressions suivantes :

$$a^2 - b^2$$
$$a^3 - b^3$$
$$a^3 + b^3$$

Exercice 5 Soient a, b et c trois réels. Calculer les expressions suivantes :

$$(a+b)^2 + (a-b)^2$$
$$(a+b)^3 - (a-b)^3$$
$$(a+b+c)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$$

Exercice 6 Soient a, b, x et y quatre réels. Factoriser les expressions suivantes :

$$5(x+2y) - 10(x+2y)(x-3)$$
$$xy - x - y + 1$$
$$a^2x^2 - b^2y^2$$

1.3 Racines carrées

Exercice 7 1. Ecrire plus simplement $\sqrt{12}-\sqrt{3}$, $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$.

2. Soient $A = 2-\sqrt{5}$ et $B = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$. En calculant A^2 et B^2, justifier que $A^2 = B^2$. Peut-on en déduire que $A = B$?
3. Justifier les égalités suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \quad \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{2}\ ; \quad \sqrt{45}-\sqrt{48}+\sqrt{5} = 4\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).$$

1.4 Inégalités, intervalles et valeur absolue

Exercice 8 Compléter (on justifiera les résultats) :
x est dans l'intervalle $[-2,4] \iff -2x+3$ est dans l'intervalle ....
x est dans l'intervalle $]-\infty,-5] \iff \dfrac{1}{x}$ est dans l'intervalle ....

Exercice 9 Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. On suppose $a < b$ et $c < d$.

1. Dans quels cas l'*intersection* $[a,b] \cap [c,d]$ est-elle vide ?
2. Dans quels cas est-ce un intervalle non vide ? Lequel ?
3. Dans quels cas est-ce un singleton ? Lequel ?
4. Dans quels cas l'*union* $[a,b] \cup [c,d]$ est-elle un intervalle ? Lequel ?

On illustrera chaque cas par un exemple.

Exercice 10 Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

1. $|x-2| \leqslant 1$.
2. $|2x+1| > 1$.

2 Les nombres complexes

2.1 Forme algébrique

Exercice 11 Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 4$.
Ecrire sous forme algébrique $z + z'$, $z - z'$, $3z - 2z'$, zz' et z^2.

Exercice 12 Soient $z = 5 + 2i$ et $z' = -1 + 4i$.
Calculer $\overline{z}$, $\overline{z'}$, $\overline{z} + \overline{z'}$, $z + z'$, $\overline{z + z'}$, $\overline{z}\overline{z'}$, zz', $\overline{zz'}$, $z\overline{z}$, $z'\overline{z'}$.

Exercice 13 Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \ ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 \ ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \ ; \quad \frac{5+2i}{1-2i}.$$

2.2 Racines carrées

Exercice 14 Calculer les racines carrées de 0, 1, -1, 2, -2, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$.

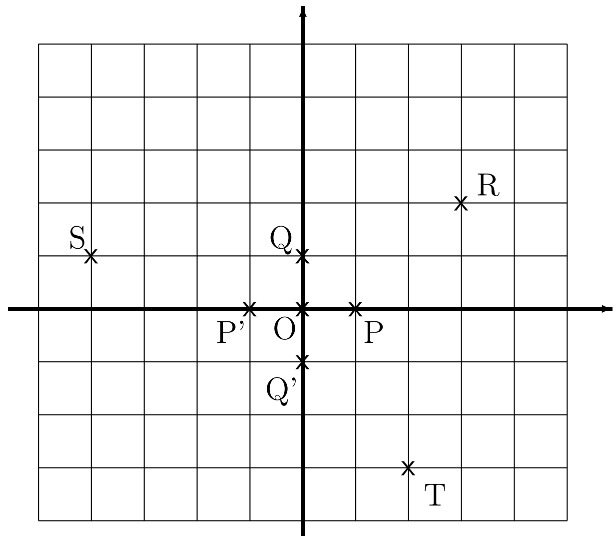
2.3 Représentation géométrique, affixe d'un point, d'un vecteur

Exercice 15 Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$$z_1 = 1 + 2i \ ; \quad z_2 = 2 \ ; \quad z_3 = -2 + i \ : \quad z_4 = 1 - 2i \ ; \quad z_5 = 3i \ ;$$

$$z_6 = -1 - 2i \ ; \quad z_7 = -2i \ ; \quad z_8 = -2i - 1 \ : \quad z_9 = z_1 + z_2 \ ; \quad z_{10} = z_1 z_2.$$

Exercice 16 Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$.



Quels sont les affixes des points O, P, Q, P', Q', R, S et T ?

3 Equations du second degré

Exercice 17 Soient a, b et c trois nombres réels tels que a soit non nul. On considère l'équation (E) qui a pour inconnue x :

$$(E) \qquad ax^2 + bx + c = 0.$$

1. Dans quel cas cette équation a-t-elle :
   (i) deux solutions réelles distinctes ?
   (ii) une solution réelle double ?
   (iii) aucune solution réelle ?
2. Dans le cas où l'équation (E) admet des solutions réelles, donner l'expression des solutions en fonction de a, b et c.
3. Dans le cas où l'équation (E) n'a pas de solutions réelles, résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18 On considère les équations suivantes d'inconnue x :

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x^2 + x - 4 = 0 \\ (2) & x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (3) & 5x^2 + x + 3 = 0 \end{array}$$

1. Résoudre ces trois équations dans $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation (3) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19 Soient a, b et c trois nombres réels tels que a soit non nul. On considère le polynôme P de la variable réelle x, défini par

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Donner le tableau des signes de P. On distinguera trois cas selon le signe ou la nullité de Δ.

Exercice 20 Résoudre les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -3x^2+4x+1 & \geqslant & 0 \\ (2) & 4x^2+4x+1 & > & 0 \\ (3) & x^2+x+1 & \leqslant & 0 \end{array}$$

Exercice 21 Soient a, b et c trois nombres réels tels que a soit non nul. On considère le polynôme P de variable réelle x, défini par

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

1. Dans quel cas le polynôme P est-il factorisable dans $\mathbb{R}$?
2. Dans le cas où l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes α et β, donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.
3. Même question dans le cas où l'équation a une solution double α.
4. Dans le cas où P n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$, on note α et $\overline{\alpha}$ les solutions complexes de l'équation $P(x) = 0$. Donner alors la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 22 On considère les polynômes suivants de la variable x :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & -3x^2+4x+1 \\ Q(x) & = & 4x^2+4x+1 \\ R(x) & = & x^2+x+1 \end{array}$$

1. Le polynôme P est-il factorisable dans $\mathbb{R}$? Si oui, le factoriser dans $\mathbb{R}$. Sinon le factoriser dans $\mathbb{C}$.
2. Même question pour le polynôme Q.
3. Même question pour le polynôme R.

Exercice 23 Soient u, $v > 0$ tels que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u+v}{u}$ et soit $r = \dfrac{u}{v}$.

1. De quelle équation du second degré le rapport r est-il solution ?
2. En déduire la valeur de r.

4 Trigonométrie

4.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 24 Soit x un réel. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(x) = 1$$

$$\cos(3x+1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 25 Soit x un réel. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

$$\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Exercice 26 Soit θ un nombre réel. On pose

$$A = \sin(\theta) + \cos(\theta) \ ; \quad B = \sin(\theta)\cos(\theta) \ ; \quad C = \sin^4(\theta) + \cos^4(\theta).$$

On se propose d'exprimer B et C en fonction de A.

1. Calculer A^2 en fonction de B et en déduire B en fonction de A.
2. Exprimer $C + 2B^2$ comme un carré. En déduire C en fonction de B puis C en fonction de A.

Exercice 27 On considère la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin^2(x) + \frac{1}{1+\tan^2(x)} \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Simplifier l'expression de f.

Exercice 28 Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$, et $\sin y$.
2. En déduire les formules analogues pour $\cos(x-y)$ et $\sin(x-y)$.
3. En déduire les formules pour $\cos(x+\pi)$, $\sin(x+\pi)$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$.
4. De même, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
5. Exprimer $\cos(2x)$ seulement en fonction de $\cos x$, puis seulement en fonction de $\sin x$.
6. Exprimer $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

Exercice 29 Soit x un réel. Démontrer que si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

4.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle des nombres complexes

Exercice 30 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$,
2. le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Exercice 31 Donner les formes trigonométriques de :

$$z_1 = 1+i \ ; \qquad z_2 = \sqrt{3}+i \ : \qquad z_3 = 1-i\sqrt{3} \ : \qquad z_4 = i.$$

Exercice 32 Soient $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$.

1. Calculer le module et l'argument de u et v.
2. Claculer le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 33 On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Ecrire $z_1 z_2$ sous forme algébrique, exponentielle et trigonométrique.
3. En déduire la valeur exacte du cosinus et du sinus suivants :

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{12}.$$

5 Les fonctions

5.1 Domaines de définition

Exercice 34 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$(a)\ f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ $\quad (b)\ f(x) = e^{x+1}$

$(a)\ f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-6x+9}$ $\quad (b)\ f(x) = \sqrt{x^2-4}$

$(c)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ $\quad (d)\ f(x) = \sqrt{\cos x + 1}$

$(e)\ f(x) = \sqrt{\ln x}$ $\quad (f)\ f(x) = \ln(2x+3)$

Exercice 35 L'égalité $\ln[(x^3+1)^2] = 2\ln(x^3+1)$ est-elle vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$?

5.2 Limites

Exercice 36 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x - \ln x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(x - \sqrt{x})\ln x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x \times 2^{-x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x-1} + e^{-x} + 1}{e^{2x} - 3}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x}e^x$

5.3 Dérivées

Exercice 37 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

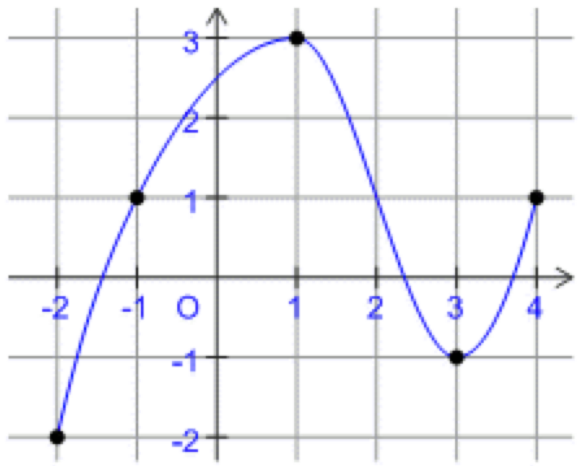
1. $f(x) = -7x^2 + 5\sqrt{x}$
2. $f(x) = (x^2 - 3)\sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + x}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$
5. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+3}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$
7. $f(x) = \cos(3x - 1)$
8. $f(x) = \sin(2 - 5x)$
9. $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$
10. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
11. $f(x) = e^{\cos x}$

Exercice 38 Soir f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Quel est le signe de la dérivée de f sur $\mathcal{D}_f$?
4. La fonction f est-elle croissante sur $\mathcal{D}_f$? Est-elle décroissante sur $\mathcal{D}_f$?

5.4 Etudes de fonctions

Exercice 39 Soit f la fonction définie sur $[-2,\ 4]$ et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$?
2. Quel est le nombre de solutions positives de l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$?
3. Compléter :

$$\text{si } -1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ alors } ... \leqslant f(x) \leqslant ...$$

Exercice 40 g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ayant pour tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
			2				0
$g(x)$		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-3		

Quelle est la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $g\left(\frac{1}{x}\right)$?