GÉOMÉTRIE ET ARITHMÉTIQUE 1
Planche 2 : Nombres complexes

1 Forme cartésienne, forme polaire

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$\textbf{a)}\ (3+2i)(1-3i),\quad \textbf{b)}\ \frac{\pi+i}{1-\sqrt{2}i},\quad \textbf{c)}\ \frac{6-i}{i},\quad \textbf{d)}\ (1+i)^2+\overline{\left(\frac{2+6i}{2-3i}\right)},\quad \textbf{e)}\ \frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2+3\bar{z}=0$; **b)** $2z+(1+i)\bar{z}=1-3i$; **c)** $z^2-2iz-1=0$;

d) $\dfrac{z+1}{\bar{z}-1}=-1$; **e)** $(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=2i-6$; **f)** $\dfrac{1-3i}{3z+2i}=\dfrac{2i-3}{5-2iz}$.

Exercice 3. Dans le plan complexe dessiner les ensembles donnés par les conditions suivantes :

a) $\mathrm{Im}[(1+2i)z-3i]<0$; **b)** $\mathrm{Re}(z-i)^2\geqslant 0$; **c)** $\dfrac{4}{z}=\bar{z}$;

d) $z^2=2\,\mathrm{Re}(iz)$; **e)** $\overline{z-i}=z-1$.

Exercice 4. Représenter sous forme algébrique et exponentielle les nombres complexes suivants.

$$\textbf{a)}\ \frac{(1-i\sqrt{3})^5(2+2i)^3}{(1-i)^7},\qquad \textbf{b)}\ \frac{(\sqrt{3}+i)^4(1+i)^9}{(1+i\sqrt{3})^{10}},\qquad \textbf{c)}\ \left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{24}.$$

Exercice 5. Calculer le module et l'argument de $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $w=\frac{u}{v}$.

Exercice 6. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

$$\textbf{a)}\ e^{e^{i\theta}},\ \theta\in\mathbb{R},\qquad \textbf{b)}\ e^{i\theta}+e^{2i\theta},\ \theta\in\mathbb{R},\qquad \textbf{c)}\ 1+e^{i\theta},\ \theta\in]-\pi,\pi[.$$

Exercice 7. Soient z, z_1 et z_2 des nombres complexes.
Montrer que $\mathrm{Re}(z)=|z|$ si et seulement si z est un nombre réel positif ou nul.
Montrer que $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ si et seulement si $\big(z_1=0$ ou $z_2=0$ ou $\mathrm{Arg}(z_1)=\mathrm{Arg}(z_2)\big)$.

2 Euler, de Moivre et Newton

Exercice 8. 1. Calculer $\sin(5\alpha)$ et $\cos(5\alpha)$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.
2. Utiliser l'identité $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ pour ramener la formule trouvée au point précédent à la forme

$$\sin(5\alpha) = A\sin\alpha + B\sin^3\alpha + C\sin^5\alpha,$$

où A, B, C sont des coeficients réels que l'on précisera.
3. En posant $\alpha = \pi/5$, déduire de l'équation ci-dessus la valeur de $\sin\pi/5$, puis celle de $\cos\pi/5$.

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Grâce aux formules d'Euler, linéariser les expressions suivantes : $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^3\alpha$, $\cos^4\alpha$, $\sin^4\alpha$. (*"Linéariser" signifie représenter comme somme de termes de la forme* $\sin(k\alpha)$ *et* $\cos(k\alpha)$, *où* k *et un entier.*)
Utiliser les expressions précédentes pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \sin(3\alpha)$.
b) $\cos^4(\alpha) - \sin^4(\alpha) = 0$.
c) $\cos^4(\alpha) - \sin^4(\alpha) = 1$.

Exercice 10. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n$ est-il un nombre réel ?

Exercice 11. Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $z \neq 1$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Utiliser la formule de la question précédente pour calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha), \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha), \quad \sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)\alpha).$$

Exercice 12. En dérivant la formule $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}, \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k}.$$

Exercice 13. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de formules du binôme, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin((k+1)\alpha), \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\beta).$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p un entier vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$.
1. Montrer que

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x} = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + ... + (1+x)^n.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

3. Ecrire ces égalités pour $p = 2$ et $p = 3$.
4. En déduire les sommes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1), \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(k+1), \quad S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

3 Racines de nombres complexes

Exercice 15. Calculer les racines carrées de

$$z_1 = 1, \quad z_2 = i, \quad z_3 = \sqrt{2}(1+i), \quad z_4 = 4-3i.$$

Exercice 16. Calculer les racines carrées de $z = 1 + i$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle. En déduire les valeurs de $\sin(\pi/8)$ et $\cos(\pi/8)$.

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ z^2 - \sqrt{3}z - i = 0, \quad \textbf{b)}\ z^2 + z + 1 = 0, \quad \textbf{c)}\ iz^2 + 2z + (1-i) = 0,$$
$$\textbf{d)}\ z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0, \quad \textbf{e)}\ z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0,$$
$$\textbf{f)}\ 4z^2 - 2z + 1 = 0, \quad \textbf{g)}\ z^4 + 10z^2 + 169 = 0, \quad \textbf{h)}\ z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 18. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Montrer que les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation de $az^2 + bz + c = 0$ sont réelles ou complexes conjuguées.

Exercice 19. Trouver les racines cubiques de $z_1 = i$, $z_2 = 2-2i$, $z_3 = 11+2i$ et $z_4 = \frac{1}{4}(-1+i)$.

Exercice 20. Représenter le nombre complexe

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

sous forme algébrique et exponentielle. En déduire les valeurs $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Puis, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

4 Géométrie

Exercice 21. Dessiner dans le plan complexe les ensembles donnés par les rélations suivantes :

a) $|z+1-2i| = 3$; **b**) $2 < |z+i| \leqslant 4$; **c**) $|(1+i)z-2| \geqslant 4$;

d) $\left|\dfrac{z+3}{z-2i}\right| \geqslant 1$; **e**) $|z^2+4| \leqslant |z-2i|$; **f**) $|\bar{z}+2-i| \leqslant |z|$;

g) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$; **h**) $\arg(z+i) = \pi\ [2\pi]$; **i**) $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(-\bar{z})\ [2\pi] < \dfrac{\pi}{2}$;

j) $\arg(z+2-i) = \pi\ [2\pi]$; **k**) $\arg\left(\dfrac{i}{z}\right) = \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$; **l**) $\dfrac{\pi}{2} < \arg(z^3)\ [2\pi] < \pi$.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que z, $1/z$, et $z-1$ aient le même module.

Exercice 23. Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition : $z + \dfrac{4}{z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$.
Généraliser pour $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

Exercice 25. Déterminer par le calcul et géométriquement les nombres complexes z tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Généraliser pour $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k$ $(k > 0,\ k \neq 1)$.

Exercice 26. Soient A, B, C trois points du plan d'affixe $z_A, z_B, z_C \in \mathbb{C}$ respectivement.
1. Montrer que le triangle ΔABC est rectangle en B si et seulement si le nombre complexe

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$$

est un imaginaire pur.
2. Montrer que le triangle ΔABC est isocèle si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de module 1 tel que

$$(1-\alpha)z_A + \alpha z_B - z_C = 0.$$

Exercice 27. 1. Définir au moyen de nombres complexes la rotation de centre $2+3i$ et d'angle $\pi/3$.
2. Définir au moyen de nombres complexes la similitude de centre z_0, d'angle α et de rapport $a \neq 0$.

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une similitude du plan.
1. Montrer que l'image par f d'une droite est une droite.
2. Montrer que l'image par f d'un cercle est un cercle.