

Géométrie et Arithmétique
DEVOIR MAISON 1 (18/09/2015)

Exercice 1 On considère les vecteurs dans \mathbb{R}^3 :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Montrer que u, v, w sont deux à deux non colinéaires.
- b) Montrer que u, v, w sont coplanaires. Le triplet $\{u, v, w\}$ forme-t-il une base de \mathbb{R}^3 ?
- c) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -k^2 - 1 \\ k \end{pmatrix} \in P(u, v)$, où $P(u, v)$ est le plan vectoriel engendré par u et v .
- d) Considérons le vecteur $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le triplet $\{u, v, \vec{i}\}$ forme-t-il une base de \mathbb{R}^3 ? Pourquoi ?
- e) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ par rapport à la base $\{u, v, \vec{i}\}$.

Exercice 2 Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k les couples suivants de vecteurs sont orthogonaux :

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ k \\ k \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad u' = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}, v' = \begin{pmatrix} k^2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trouver un vecteur dans \mathbb{R}^3 de norme 1 orthogonal à u et v .

Exercice 4 Démontrer que les quatre segments qui relient les milieux de deux côtés consécutifs d'un losange forment un rectangle.

