**Corrigé de l'examen de Géométrie et arithmétique 1 (L1 IM, 2015-2016, session 2)**

Le texte entre crochets ne fait pas partie du corrigé : il s'agit de variantes ou de commentaires. Le barème est sur 20.

**Exercice 1.** [barème : $5 = 1 + 1 + 1 + 2$]

1. Avec les coordonnées du point comme constantes, et celles du vecteur comme coefficients, on obtient le système paramétrique suivant pour $\mathcal{D}_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t, \\ y &=& 1-t, \\ z &=& t. \end{array}\right.$$

2. Comme solutions évidentes du système cartésien de $\mathcal{D}_2$, on obtient les points suivants :

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le vecteur directeur et le système paramétrique suivants pour $\mathcal{D}_2$ :

$$u_2 = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& s, \\ y &=& s, \\ z &=& 0. \end{array}\right.$$

[On peut aussi obtenir le système paramétrique en posant $s = x$ dans le système cartésien. $u_2$ est alors le vecteur dont les coordonnées sont les coefficients du système obtenu.]

3. En remplaçant $x, y, z$ dans le système cartésien pour $\mathcal{D}_2$ par leurs valeurs respectives dans le système paramétrique pour $\mathcal{D}_1$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} t-(1-t) &=& 0, \\ t &=& 0, \end{array}\right. \quad \text{d'où } -1 = 0 \text{ : impossible.}$$

L'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est donc vide.

4. Si $P$ est donné par $t$ dans le système paramétrique de $\mathcal{D}_1$, et si $Q$ est donné par $s$ dans le système paramétrique de $\mathcal{D}_2$, on obtient :

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} s-t \\ s+t-1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

[On a pris soin de donner des noms différents aux paramètres pour $P$ et pour $Q$.]

On cherche $P, Q$ tels que ce vecteur soit orthogonal à $u_1$ et à $u_2$, autrement dit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (s-t)-(s+t-1)+(-t) &=& 0, \\ (s-t)+(s+t-1) &=& 0, \end{array}\right. \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3t &=& 1, \\ 2s &=& 1. \end{array}\right.$$

La solution unique de ce système est $(t, s) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

En remplaçant les paramètres $t$ et $s$ par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** [barème : 4 = 1 + 1 + 1 + 1]

1. On a $f(z) = iz + 2 = z$ pour $z = \dfrac{2}{1-i} = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2(1+i)}{2} = 1 + i$.

2. $f$ est la composée de la translation $z \mapsto z + 2$ avec la rotation $z \mapsto iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.

   D'après le résultat de la question précédente, $f$ est la rotation de centre $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la similitude de centre $1 + i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 1.

3. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $1 + i$ et de rayon $r$.

4. $\mathcal{C}$ est invariant par $f$ car $f$ est une rotation de centre $1 + i$. Autrement dit, $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

**Exercice 3.** [barème : 3 = 1 + 2]

1. Une racine $n$-ième de $c$ est un complexe $z$ tel que $z^n = c$. Il y en a exactement $n$.

2. Les 3 racines cubiques de $c = 8i = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont les suivantes :

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i, \qquad 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i, \qquad 2e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i.$$

**Exercice 4.** [barème : 8 = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2]

1. $P'(X) = 6X^5 + 5X^4 - 16X^3 + 6X^2 - 22X + 1$.

2. Par division euclidienne, on obtient $P' = AQ$ avec $Q(X) = X^2 + 1$. Le reste est nul.

3. Les racines de $Q$ sont $\pm i$.

4. $P(i) = i^6 + i^5 - 4i^4 + 2i^3 - 11i^2 + i - 6 = -1 + i - 4 - 2i + 11 + i - 6 = 0$, et de même, $P(-i) = 0$.

   Ainsi, $\pm i$ sont des racines communes de $P$ et $P'$ : ce sont donc des racines multiples de $P$.

   [Comme $P' = AQ$, il est inutile de calculer $P'(\pm i)$ pour vérifier que ce sont des racines de $P'$.]

5. On a $Q^2(X) = (X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$.

   Par division euclidienne, on obtient $P = Q^2 B$ avec $B(X) = X^2 + X - 6$. Le reste est nul.

6. Les racines de $Q$ sont complexes, mais celles de $B$ sont les réels $\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$, c'est-à-dire 2 et $-3$, d'où les décompositions suivantes de $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X-2)(X+3)(X^2+1)^2 = (X-2)(X+3)(X-i)^2(X+i)^2.$$