Aix-Marseille Université   Facultés des sciences - Aix-Montperrin

Géométrie et Polynômes

Guillemette Chapuisat

guillemette.chapuisat@univ-amu.fr

voir aussi le site http://www.aiezzi.it/enseignement/geometrie.html

Licences de Mathématiques et d'Informatique, 1er semestre

2016-2017

Table des matières

1 Géométrie dans le plan et dans l'espace **4**

I. Vecteurs du plan et de l'espace 4
1. Opérations sur les vecteurs 4
2. Représentation graphique 5
3. Combinaisons linéaires 6
4. Bases de $\mathbb{R}^2$ 8

II. Produit scalaire, orthogonalité et norme 8
1. Produit scalaire 8
2. Norme 9
3. Angle entre 2 vecteurs 11

III. Droites dans le plan et dans l'espace 13
1. Propriétés des droites de $\mathbb{R}^n$ 13
2. Équations d'une droite de $\mathbb{R}^2$ 14

IV. Produit vectoriel 15

V. Droites et plans de l'espace 16
1. Équation d'une droite de $\mathbb{R}^3$ 16
2. Plan dans l'espace 17
3. Équations d'un plan de $\mathbb{R}^3$ 19

2 Nombres complexes **20**

I. Forme algébrique 20
1. Parties réelles et imaginaires 20
2. Conjugué 21

II. Calculs algébriques 22
1. Sommes et produits 22
2. Formule de la somme géométrique 23
3. Formule du binôme 23

III. Forme exponentielle 24
1. L'exponentielle complexe 24
2. Module et argument 26
3. Éléments de géométrie du plan complexe 27

IV. Transformations du plan 27
1. Translation 28
2. Homothétie 28
3. Rotations 29

V. Résolution d'équations complexes 30
1. Équations de degré deux 30
2. Résolution pratique de $z^n = a$ 31

3. Racines n-ième de l'unité 31

3 Polynômes **33**
I. Les polynômes 33
1. Définitions 33
2. Division euclidienne 34
II. Racines d'un polynôme 35
1. Définition 35
2. Relations coefficients-racines 36
3. Multiplicité 37
III. Polynômes irréductibles 37

Alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha
β	B	béta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ ou ε	E	epsilon
ζ	Z	dzêta
η	H	êta
θ ou ϑ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu

Minuscule	Majuscule	Nom
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Y	upsilon
ϕ ou φ	Φ	phi
χ	X	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Chapitre 1

Géométrie dans le plan et dans l'espace

I. Vecteurs du plan et de l'espace

1. Opérations sur les vecteurs

Définition 1.1

- Un scalaire est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$
- Un vecteur du plan est un couple de réels $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- Un vecteur de l'espace est un triplet de réels $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Les scalaires x, y (et z) sont appelés composantes ou coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.
- L'ensemble des vecteurs du plan est noté $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathbb{R}^3$. On utilisera la notation $\mathbb{R}^n$ si on veut parler de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Notation 1.2

Dans $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarques:

- L'égalité $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ signifie $x = x'$ <u>et</u> $y = y'$. Donc $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ signifie que l'une des composantes est non nulle, pas nécessairement toutes ! Par exemple, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.
- On peut aussi écrire les vecteurs en ligne $\overrightarrow{u} = (x, y)$, cela prend moins de place, mais dans cette UE, l'écriture en colonne sera préférée pour favoriser le lien avec l'UE d'algèbre linéaire au semestre suivant.
- Sauf cas particulier, on notera désormais u au lieu de $\overrightarrow{u}$ et c'est au lecteur de savoir s'il s'agit d'un scalaire ou d'un vecteur et si on travaille dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$!

Définition 1.3

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la somme de deux vecteurs par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et le produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on définit la somme de deux vecteurs par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$$

et le produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.4

Soient u, v, $w \in \mathbb{R}^n$. Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$. Les opérations de somme (de deux vecteurs) et de produit (d'un vecteur par un scalaire) satisfont les propriétés suivantes :

- *La somme est commutative : $u + v = v + u$;*
- *La somme est associative : $(u + v) + w = u + (v + w)$;*
- *la somme admet un élément neutre : $u + \overrightarrow{0} = u$;*
- *Le produit (d'un vecteur par un scalaire) est distributif par rapport à la somme : $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ et $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;*
- *Le produit (d'un vecteur par un scalaire) est associatif : $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;*
- *Le produit (d'un vecteur par un scalaire) admet un élément neutre : $1u = u$.*
- *Le produit (d'un vecteur par un scalaire) admet un élément absorbant à gauche et un élément absorbant à droite : $0u = \overrightarrow{0} = \lambda \overrightarrow{0}$.*

Démonstration : Ces propriétés découlent directement des propriétés de la somme et du produit sur $\mathbb{R}$. ■

Remarques:

- On ne peut pas multiplier ou diviser 2 vecteurs !!!
- On peut soustraire un vecteur à un autre puisque $u - v = u + (-1)v$!
- Dans le produit (d'un vecteur par un scalaire), on écrit toujours le scalaire avant le vecteur : λu et non $u\lambda$.

2. Représentation graphique

On se place dans le plan, mais les choses sont similaires dans l'espace (mais plus difficiles à dessiner !).

On munit le plan du repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. À un couple de réels (x, y), on associe un point M d'abscisse x et d'ordonnée y. On le note $M(x, y)$. On représente souvent le vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par une flèche qui part de O et arrive au point $M(x, y)$. D'autre part, pour 2 points $A(x_A, y_A)$ et

$B(x_B, y_B)$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et on le représente comme une flèche partant de A et allant en B.

Exemple: Pour $A(1,2)$ et $B(3,5)$, on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Remarque: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 1.5 (*Relation de Chasles*)

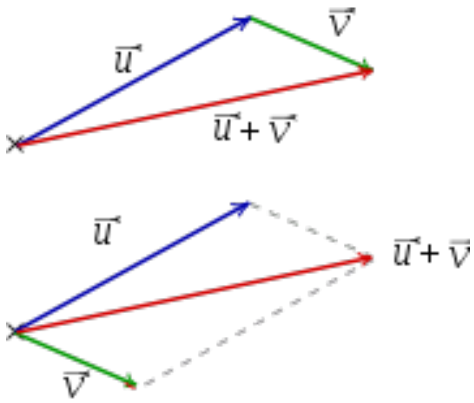
Soient A, B et C 3 points du plan ou de l'espace. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Démonstration : Il suffit de l'écrire ! ■

Définition 1.6

Quatre points (ordonnés) A, B, C, D de $\mathbb{R}^n$ forment un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Alors par Chasles, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Remarque: Cette définition du parallélogramme donne une méthode graphique pour dessiner la somme de 2 vecteurs.



3. Combinaisons linéaires

Définition 1.7

Soient $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ est un vecteur qui peut s'écrire sous la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des scalaires.

Exemple: En prenant $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, on voit que $\overrightarrow{0}$ est combinaison linéaire de toute famille de vecteurs.

En prenant $\lambda_i = 1$ et $\lambda_j = 0$ pour $j \neq i$, on voit que tout vecteur u_i est combinaison linéaire d'une famille qui le contient $u_1, \ldots, u_k$.

Définition 1.8

Pour $n = 2$ ou 3, une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Remarque: Au second semestre, on verra qu'il suffit de vérifier l'existence de combinaison linéaire pour tout vecteur et alors l'unicité est assurée.

Exemple: La famille $\left(\overrightarrow{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, prenons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On cherche toutes les possibilités d'écrire ce vecteur comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$, c'est à dire qu'on cherche λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \overrightarrow{\imath} + \mu \overrightarrow{\jmath}$.

D'après les règles sur les opérations, cela se réécrit

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = x \text{ et } \mu = y.$$

Il y a donc bien une unique possibilité.

De même, on peut montrer que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ces bases sont appelées bases canoniques.

Exemple: La famille $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

En effet, soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ quelconque. On cherche toutes les possibilités d'écrire ce vecteur comme combinaison linéaire de e_1 et e_2, c'est à dire qu'on cherche λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda + \mu = x \text{ et } \lambda - \mu = y \Leftrightarrow \lambda = \frac{x+y}{2} \text{ et } \mu = \frac{x-y}{2}.$$

Il y a donc bien une unique possibilité.

Proposition et définition 1.9

Soient u et $v \in \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u = \overrightarrow{0}$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$;

ii) il existe $w \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha w$ et $v = \beta w$;

iii) il existe μ et $\nu \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\mu u + \nu v = 0$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u et v sont colinéaires. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, on dit que u et v sont linéairement indépendants ou non colinéaires.

Démonstration : *i)* $\Rightarrow$ *ii)* On suppose *i)* et on souhaite démontrer *ii)*. Si $u = \overrightarrow{0}$, on a bien $u = \alpha v$ et $v = \beta v$ avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Et sinon, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$ donc $u = \alpha u$ et $v = \beta u$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = \lambda$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* On suppose qu'on a *ii)* et on souhaite montrer *iii)*. Si $\alpha = \beta = 0$, alors $u = v = \overrightarrow{0}$. Et dans ce cas, on a $\mu u + \nu v = \overrightarrow{0}$ en posant par exemple $\mu = \nu = 1$. Sinon comme $u = \alpha w$ et $v = \beta w$, on choisit $\mu = \beta$ et $\nu = -\alpha$ qui ne sont pas tous les deux nuls, alors $\mu u + \nu v = \beta\alpha w - \alpha\beta w = \overrightarrow{0}$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* On suppose qu'on a *iii)* et on veut montrer *i)*. Si $u = \overrightarrow{0}$, i) est vrai. On suppose maintenant $u \neq \overrightarrow{0}$. Si $\nu = 0$, on a alors $\mu u = 0$ donc $\mu = 0$ mais cela contredit le fait que μ et ν doivent être non tous nuls, donc $\nu \neq 0$, alors $v = -\frac{\mu}{\nu} u$ donc on a bien *i)* avec $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$. ■

Exemple:

- Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{0}$ sont colinéaires.
- Les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $u \neq \overrightarrow{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$, alors $\lambda = 1$ d'après la première coordonnée mais $\lambda = 2$ d'après la seconde coordonnée : impossible !

4. Bases de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.10

Soient $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On appelle déterminant de u et v le scalaire $\det(u, v) = ad - bc$.

Proposition 1.11

Soient u et $v \in \mathbb{R}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) *La famille (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$;*

ii) *u et v sont non colinéaires.*

iii) $\det(u, v) \neq 0$ *;*

Démonstration : **non** *ii)* $\Rightarrow$ **non** *i)* On montre plus précisément que u et v colinéaires équivaut à u et v ne forment pas une base. En effet, u et v colinéaires équivaut à l'existence de $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$ tels que $\mu u + \nu v = \overrightarrow{0}$, mais on a aussi $0u + 0v = \overrightarrow{0}$ donc le vecteur $\overrightarrow{0}$ peut s'écrire de 2 façons différentes comme combinaison linéaire de u et v. Par définition, (u, v) ne forme pas une base de $\mathbb{R}^2$.

non *ii)* $\Rightarrow$ **non** *iii)* On pose $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Si u et v sont colinéaires, soit $u = \overrightarrow{0}$ mais alors $a = b = 0$ et $\det(u, v) = ad - bc = 0$, soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$ et alors $c = \lambda a$ et $d = \lambda b$, mais alors $\det(u, v) = ad - bc = \lambda ab - \lambda ab = 0$!

non *iii)* $\Rightarrow$ **non** *ii)* On pose à nouveau $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Si $\det(u, v) = ad - bc = 0$, alors :

- soit $a = 0$ et $b = 0$ mais alors $u = \overrightarrow{0}$ et u et v sont bien colinéaires,
- soit $a = 0$ et $b \neq 0$ mais alors $\det(u, v) = 0$ implique $c = 0$ donc $v = \frac{d}{b} u$,
- soit enfin $a \neq 0$, donc $d = \frac{bc}{a}$ donc $v = \frac{c}{a} u$.

Le reste de la démonstration est repoussé au semestre suivant. ∎

Exemple: Les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car $\det(u, v) = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3 \neq 0$! Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.

II. Produit scalaire, orthogonalité et norme

Dans cette partie, $n = 2$ ou 3.

1. Produit scalaire

Définition 1.12

Pour deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (resp. $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$), on définit le produit scalaire de u et v par

$$u \cdot v = xx' + yy' \quad (\text{resp. } u \cdot v = xx' + yy' + zz').$$

Exemple: Pour $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a $u \cdot v = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$.

Exemple: Dans $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{\jmath} = 0$.
Dans $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{k} = 0$.

Remarque: Dans la littérature, on utilise aussi les notations $\langle u, v \rangle$ ou $\langle u | v \rangle$ pour le produit scalaire de deux vecteurs u et v.

Proposition 1.13

Soient u, v et $w \in \mathbb{R}^n$. Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire a les propriétés suivantes :
- *(symétrie) $u \cdot v = v \cdot u$;*
- *(linéarité à gauche) $(u + v) \cdot w = (u \cdot w) + (v \cdot w)$ et $(\lambda u) \cdot w = \lambda(u \cdot w)$, ce qui entraîne également la linéarité à droite par symétrie : $u \cdot (v + w) = (u \cdot v) + (u \cdot w)$ et $u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$. On dit que le produit scalaire est bilinéaire ;*
- *(positivité) $u \cdot u \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, et de plus $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.*

Démonstration : Il suffit de l'écrire avec les coordonnées ! ■

Remarque: On a $\overrightarrow{0} \cdot u = 0 = u \cdot \overrightarrow{0}$.

Définition 1.14

On dit que deux vecteurs u et $v \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si $u \cdot v = 0$. On note $u \perp v$.

Exemple: Les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux car $u \cdot v = 1 \times (-2) + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 0$.

Exemple: Les vecteurs de la base canonique sont 2 à 2 orthogonaux.

Proposition 1.15

Deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non nuls et orthogonaux forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration : On montre la contraposée, c'est à dire qu'on suppose que deux vecteurs u et v non nuls ne forment pas une base de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire qu'ils sont colinéaires) et on montre qu'ils ne sont pas orthogonaux.

Si $u \neq \overrightarrow{0}$ et $v \neq \overrightarrow{0}$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $v = \lambda u$. Alors $u \cdot v = \lambda u \cdot u \neq 0$ d'après les propriétés précédentes. ■

Proposition 1.16

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non nuls et deux à deux orthogonaux forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration : Cf semestre suivant ■

2. Norme

Définition 1.17

La norme d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
Dans $\mathbb{R}^2$, si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemple: $\|\overrightarrow{\imath}\| = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ comme dans $\mathbb{R}^3$. Idem pour $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{k}$.

Si $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\|u\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Remarque: Graphiquement, d'après Pythagore, la norme représente la longueur du vecteur.

On note aussi $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ la longueur du segment entre A et B.

Proposition 1.18

Soient $u \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :
- $\|u\| \geq 0$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$ *;*
- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$ *;*
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.

Démonstration : Il suffit de l'écrire avec les coordonnées. ■

Proposition 1.19 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tout u et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|.$$

De plus l'inégalité est une égalité si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration : Soient u et $v \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit $P(t) = \|u + tv\|^2 \geq 0$. Mais on peut aussi réécrire

$$P(t) = (u + tv) \cdot (u + tv) = u \cdot u + 2tu \cdot v + (tv) \cdot (tv) = \|u\|^2 + 2tu \cdot v + t^2 \|v\|^2.$$

C'est un polynôme du second degré avec $\Delta = 4\big((u \cdot v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2\big)$. Comme $P \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a forcément $\Delta \leq 0$ d'où $(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ et on obtient l'inégalité en prenant la racine carrée.

Le cas d'égalité (hormis $u = 0$ ou $v = 0$) correspond au cas où $\Delta = 0$, ce qui signifie qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(t) = 0$ ou encore $\|u + t_0 v\|^2 = 0 \Leftrightarrow u + t_0 v = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow u = -t_0 v$ donc u et v sont colinéaires. ■

Proposition 1.20 (*Inégalité triangulaire*)

Soient u et $v \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Démonstration : On a $\|u + v\|^2 = (u + v) \cdot (u.v) = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|u\| \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$ d'après Cauchy-Schwarz. D'où le résultat en prenant la racine carrée. ■

Définition 1.21

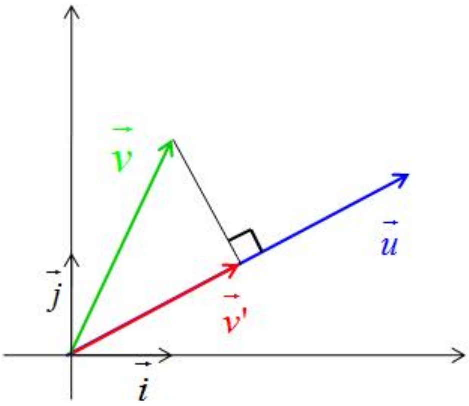
On dit qu'une base de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de norme 1.

Exemple: La base canonique de $\mathbb{R}^2$ $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est orthonormée.

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée.

Proposition et définition 1.22

Soient $u \neq \overrightarrow{0}$ et v des vecteurs. Le projeté orthogonal de v sur u est le vecteur v' colinéaire à u tel que $v - v'$ soit orthogonal à u. On a $v' = \dfrac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} u$.

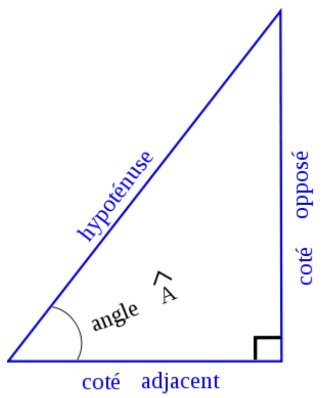


Démonstration : (Existence) Avec cette formule, v' est bien colinéaire à u car $\frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}$. Et de plus $(v - v') \cdot u = v \cdot u - \frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} u \cdot u = v \cdot u - \frac{(u \cdot v)}{\|u\|^2} \|u\|^2 = 0$. Donc v' convient.

(Unicité) Supposons qu'il existe un autre vecteur v'' tel quev'' soit colinéaire à u et $v - v''$ soit orthogonal à u. Alors $v' - v''$ est colinéaire à $u \neq \overrightarrow{0}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v' - v'' = \lambda u$. Alors $(v' - v'') \cdot u = \lambda \|u\|^2 = (v' - v + v - v'') \cdot u = -(v - v') \cdot u + (v - v'') \cdot u = 0 + 0 = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $v' - v'' = \overrightarrow{0}$! ■

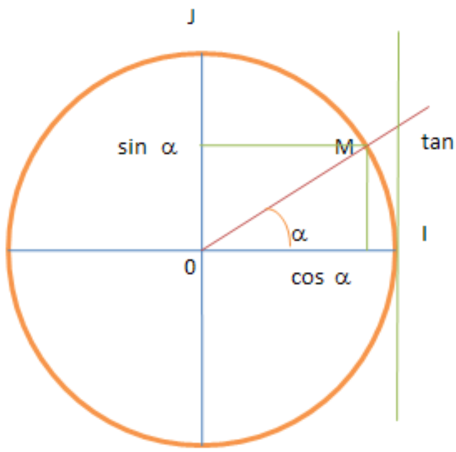
3. Angle entre 2 vecteurs

Définition 1.23



Grâce au théorème de Thalès, on peut définir pour $\hat{A} \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(\hat{A}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}, \quad \cos(\hat{A}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}, \quad \tan \hat{A} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}.$$



On généralise la définition du cosinus et du sinus pour $\theta \in \mathbb{R}$ à l'aide du cercle trigonométrique.

Proposition 1.24

Les fonctions $\cos, \sin$ *et* $\tan$ *sont* 2π *périodiques :*
pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ *et* $\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$.

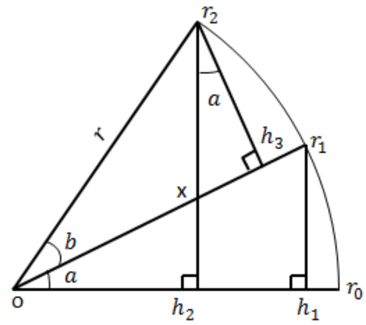
La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ et $\tan(-x) = -\tan x$.

Par Pythagore, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Les formules d'addition sont

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

(démo par Thalès sur l'image ci-contre)



D'où $\cos(x+\pi) = -\cos x$, $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, ...A retrouver avec le cercle trigonométrique !

Remarque: Un tableau de valeurs particulières à connaître

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\pi/2$	0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
π	-1	0

Il suffit de retenir l'une des valeurs pour cos ou sin (s'aider du cercle trigonométrique) et on retrouve l'autre avec la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$!

Définition 1.25

Soient u et $v \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs non nuls. On définit l'angle (non orienté) entre u et v comme le nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Exemple: On pose $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors $\|u\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\|v\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$. D'autre part, $u \cdot v = 2 \times 0 + 2 \times 3 = 6$. Donc l'angle α entre u et v vérifie $\cos \alpha = \frac{6}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{4}$!

Définition 1.26

Soient u et $v \in \mathbb{R}^2$ et α l'angle non orienté entre u et v.

Dans $\mathbb{R}^2$, on peut définir l'angle orienté entre u et v, et on le notera (u, v), comme α si on passe de u à v en décrivant un angle α et en tournant dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) ou $-\alpha$, si on passe de u à v en décrivant un angle α dans le sens anti-trigonométrique (sens des aiguilles d'une montre).

Remarque: Pour u et $v \in \mathbb{R}^2$, on a $(u, v) = -(v, u)$.

Et on admettra que pour $w \in \mathbb{R}^2$, $(u, v) = (u, w) + (w, u)$.

III. Droites dans le plan et dans l'espace

1. Propriétés des droites de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.27

Soit A un point de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. On définit la droite $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur u comme l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda u \text{ pour un } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque: Par abus, on note souvent $M = A + \lambda u$ même si on ne peut pas sommer un point et un vecteur ! Du coup, on note souvent $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}u$.

Définition 1.28

On dit qu'une droite est vectorielle si elle contient l'origine $O(0, 0)$.

Proposition 1.29

- *Si M et $P \in \mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{MP}$ et u sont colinéaires.*
- *Deux droites sont égales si elles ont un point commun et des vecteurs directeurs colinéaires.*
- *Si $A \neq B$, il y a une unique droite qui les contient, c'est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.*

Démonstration : Pour le premier point, on utilise la relation de Chasle, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\lambda_M u + \lambda_P u$ par définition de M et $P \in \mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{MP} = (-\lambda_M + \lambda_P)u$ et les vecteurs sont bien colinéaires.

Les démonstrations des autres points sont laissées au lecteur. ■

Remarque: Attention, il n'y a pas d'unicité du vecteur directeur ni du point "définissant" la droite !

Définition 1.30

Trois points A, B et $C \in \mathbb{R}^n$ sont alignés s'il existe une droite de $\mathbb{R}^n$ qui les contient, c'est à dire si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition 1.31

On dit que deux droites sont parallèles si leur vecteurs directeurs sont colinéaires.
On dit que deux droites sont perpendiculaires si leur vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Proposition 1.32

Deux droites parallèles distinctes n'ont aucun point commun.

Démonstration : Si les droites sont parallèles alors leur vecteurs directeurs sont colinéaires et si elles ont un point commun, alors les droites sont confondues d'après la proposition précédente. ■

Corollaire 1.33

Il existe une unique droite parallèle à une autre et passant par un point donné.

Démonstration : Laissée au lecteur ! ■

Proposition et définition 1.34

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{R}^n$ de vecteur directeur $u \in \mathbb{R}^n$. Soit A un point de $\mathbb{R}^n$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ est l'unique point $H \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AH} \perp u$.

Démonstration : (existence) Soit O un point quelconque de $\mathcal{D}$. On définit H tel que $\overrightarrow{OH} = \left(\overrightarrow{OA} \cdot \frac{u}{\|u\|}\right) \frac{u}{\|u\|}$.
C'est bien un point de $\mathcal{D}$ et on a

$$\overrightarrow{AH} \cdot u = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}).u = -\overrightarrow{OA} \cdot u + (\overrightarrow{OA} \cdot u)\frac{u \cdot u}{\|u\|^2} = 0.$$

(unicité) Supposons qu'il existe deux points H_1 et H_2 de $\mathcal{D}$ tels que $\overrightarrow{AH_1} \perp u$ et $\overrightarrow{AH_2} \perp u$. Alors $\overrightarrow{H_1H_2}$ est colinéaire à u c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{H_1H_2} = \lambda u$. Mais $\overrightarrow{H_1H_2} \cdot u = (\overrightarrow{H_1A} + \overrightarrow{AH_2}) \cdot u = 0$ donc $\lambda u.u = \lambda\|u\|^2 = 0$. Comme $u \neq \overrightarrow{0}$, on a $\|u\|^2 > 0$ donc $\lambda = 0$ et $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{0}$ d'où l'unicité ! ■

Proposition et définition 1.35

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{R}^n$ et A un point de $\mathbb{R}^n$. La distance de A à $\mathcal{D}$ est définie par

$$d(A, \mathcal{D}) = \min_{M \in \mathcal{D}} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

Si H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, on a $d(A, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{AH}\|$.

Démonstration : On cherche à minimiser $\|\overrightarrow{AM}\|$ ce qui revient à minimiser $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + 2\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM} = \|AH\|^2 + \|HM\|^2$ car H et $M \in \mathcal{D}$ donc par définition du projeté orthogonal $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AH}$. Maintenant d'après les propriétés de la norme $\|\overrightarrow{HM}\|^2 \geq 0$ et $\|\overrightarrow{HM}\|^2 = 0$ si et seulement si $M = H$. D'où le résultat. ■

2. Équations d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Méthode 1

Soit $A(a_1, a_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On considère $\mathcal{D}$ la droite passant par A de vecteur directeur u. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathcal{D}$. La définition de la droite $\mathcal{D}$ se réécrit en termes de coordonnées :

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda u_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 \end{cases} \quad \text{pour un } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \end{cases} \quad \text{pour un } t \in \mathbb{R}$$

C'est **l'équation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple: Soit $A(1, 2)$ et $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Une équation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur u est $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on lit sur l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 7t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ que la droite correspondante passe par le point $(2, -1)$ et admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Remarque: Attention, il n'y a pas d'écriture unique de ces équations ! Les droites $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 0 \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$ sont bien les mêmes, c'est l'axe des abscisses ! On a juste "changer le paramètre pour la décrire".

Méthode 2

Comme $u \neq \overrightarrow{0}$, on peut isoler t dans l'une des équations et l'injecter dans l'autre pour obtenir **l'équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$: $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exemple: Pour la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, avec la deuxième équation, on a $t = 2-y$ donc en injectant cette valeur dans la première équation, on obtient $x = 1+3(2-y)$ ou encore $x + 3y = 7$. C'est l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Remarque: A nouveau, il n'y a pas d'équation cartésienne unique pour une droite donnée. Si la droite vérifie $x + y = 2$, elle vérifie aussi $2x + 2y = 4$!

Méthode 3

Réciproquement, si on dispose d'une équation cartésienne d'une droite : $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et que l'on souhaite retrouver une équation paramétrique, on pose $x = t$ si $b \neq 0$ (sinon on pose $y = t$!) et on calcule y en fonction de t en remplaçant x par t dans l'équation cartésienne.

Exemple: Soit $\mathcal{D}$ l'équation définie par $2x + y = 5$. On pose $x = t$ et on a alors $2t + y = 5$, c'est à dire $\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{D}'$ l'équation définie par $2x = 5$. On pose alors $y = t$ et on a alors $2x = 5$, c'est à dire $\begin{cases} x = 5/2 \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Proposition et définition 1.36

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathbb{R}^2$. Un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est un vecteur $n \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tous points M et $P \in \mathcal{D}$, on a $\overrightarrow{MP} \perp n$.

Si l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $ax + by = c$, $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration : Soit $M(x_M, y_M)$ et $P(x_P, y_P) \in \mathcal{D}$. On a alors $ax_M + by_M = ax_P + by_P = c$ donc en faisant la différence $a(x_P - x_M) + b(y_P - y_M) = 0$ ce qui correspond exactement à $\overrightarrow{MP} \cdot n = 0$. ■

IV. Produit vectoriel

Définition 1.37

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de u par v est le vecteur

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

Exemple: On a $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

Exemple: $\overrightarrow{\imath} \wedge \overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{\jmath}$ mais $\overrightarrow{\jmath} \wedge \overrightarrow{\imath} = -\overrightarrow{k}$

Proposition 1.38

Soient u, v et $w \in \mathbb{R}^3$. Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :
- *Anti-symétrie : $u \wedge v = -v \wedge u$;*
- *Bilinéarité : $(u+v)\wedge w = u\wedge w + v\wedge w$ et $(\lambda u)\wedge w = \lambda(u\wedge w)$ ainsi que $u\wedge(v+w) = u\wedge v + u\wedge w$ et $u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$;*
- *Orthogonalité : $u \cdot (u \wedge v) = 0$ et $v \cdot (u \wedge v) = 0$;*
- *$u \wedge v = \overrightarrow{0}$ si et seulement si u et v sont colinéaires ;*
- *Si $\alpha \in [0, \pi]$ est l'angle entre u et v, alors $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin \alpha$.*
- *$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$ représente l'aire du parallélogramme $ABCD$.*

Démonstration : Il suffit de l'écrire... ■

Définition 1.39

Une base est directe si on peut la représenter avec les 3 premiers doigts de la main droite. Sinon, on dit qu'elle est indirecte.

Proposition 1.40

Si u et $v \in \mathbb{R}^3$ sont non colinéaires, $(u, v, u \wedge v)$ forment une base directe de$\mathbb{R}^3$.

Définition 1.41

Soient u, v et $w \in \mathbb{R}^3$. Le produit mixte de u, v et w est le scalaire $(u \wedge v) \cdot w$.

Proposition 1.42

Soient u, v et $w \in \mathbb{R}^3$. Le volume du parallélépipède déterminé par les 3 vecteurs veut $|(u\wedge v)\cdot w|$.
Les 3 vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.

Démonstration : Laissée en exercice... ■

V. Droites et plans de l'espace

1. Équation d'une droite de $\mathbb{R}^3$

Soit $A(a_1, a_2, a_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur. On considère $\mathcal{D}$ la droit passant par A et de vecteur directeur u, c'est à dire l'ensemble des point $M(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda u$. En écrivant cette équation en terme de coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda u_1 \\ y - a_2 = \lambda u_2 \\ z - a_3 = \lambda u_3 \end{cases} \text{pour un } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \\ z = a_3 + tu_3 \end{cases} \text{pour un } t \in \mathbb{R}$$

C'est **l'équation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple: Soit $A(1,2,3)$ et $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Une équation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur u est $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on lit sur l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+7t \\ z = 1+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ que la droite correspondante passe par le point $(2,-1,1)$ et admet pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Comme $u \neq \overrightarrow{0}$, on peut isoler t dans l'une des équations et l'injecter dans les autres pour obtenir **les équations cartésiennes** de la droite $\mathcal{D}$ (ou un système d'équations cartésiennes) : $\begin{cases} ax+by+cz = d \\ a'x+b'y+c'z = d' \end{cases}$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires.

Exemple: Pour la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \\ z = -2+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, avec la deuxième équation, on a $t = 2-y$ donc en injectant cette valeur dans la première équation, on obtient $x = 1+3(2-y)$ ou encore $x+3y = 7$. Et en injectant la valeur de t dans la 3ème équation, on a $z = -2+2(2-y)$ soit $z+2y = 2$. Les équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ s'écrivent donc $\begin{cases} x+3y = 7 \\ z+2y = 2 \end{cases}$

Réciproquement, si on dispose d'une équation cartésienne d'une droite : $\begin{cases} ax+by+cz = d \\ a'x+b'y+c'z = d' \end{cases}$ avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires et que l'on souhaite retrouver une équation paramétrique, on pose $x = t$ si $b \neq 0$ (sinon on pose $y = t$ ou $z = t$!) et on résout le système d'inconnu y et z en fonction du paramètre t obtenu en remplaçant x par t dans les 2 équations cartésiennes.

Exemple: Soit $\mathcal{D}$ l'équation définie par $\begin{cases} 2x+y+z = 5 \\ x+y-z = 2 \end{cases}$. On pose $x = t$ et on a alors $\begin{cases} 2t+y+z = 5 \\ t+y-z = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y+z = 5-2t \\ y-z = 2-t \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = \frac{7}{2}-\frac{3}{2}t \\ z = \frac{3}{2}-\frac{t}{2} \end{cases}$, c'est à dire $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{7}{2}-\frac{3}{2}t \\ z = \frac{3}{2}-\frac{t}{2} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2. Plan dans l'espace

Définition 1.43

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$. Soient u et $v \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs non colinéaires. On appelle plan engendré par u et v et passant par A, l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de $\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v$ pour des λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Remarque: Comme pour les droites, on note souvent par abus $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$.

Définition 1.44

On dit qu'un plan est vectoriel s'il contient l'origine.

Proposition 1.45

- *Si M et $P \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{MP}$ est combinaison linéaire de u et v.*
- *Deux plans sont égaux s'ils ont un point commun et que les vecteurs qui engendrent l'un sont combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent l'autre.*
- *Si A, B et C sont 3 points non alignés de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique plan qui les contient, c'est la plan passant par A et engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*

Démonstration : Exercice. ■

Définition 1.46

Quatre points de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires s'ils appartiennent à un même plan.

Définition 1.47

Deux plans sont parallèles si les vecteurs qui engendrent l'un sont combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent l'autre.

Proposition 1.48

- *Tout plan est parallèle à lui-même.*
- *Pour A un point de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{P}$ un plan fixé, il existe un unique plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par A.*
- *Deux plans parallèles et non confondus n'ont aucun point commun.*

Démonstration : Similaire au cas de la droite de $\mathbb{R}^2$. ■

Proposition et définition 1.49

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v. Soit A un point de $\mathbb{R}^3$.

Il existe un unique point $H \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AH} \perp u$ et $\overrightarrow{AH} \perp v$. Ce point H est appelé projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Démonstration : Exercice ■

Proposition et définition 1.50

Soit $\mathcal{P}$ une droite de $\mathbb{R}^3$ et A un point de $\mathbb{R}^3$. La distance de A à $\mathcal{P}$ est définie par

$$d(A, \mathcal{P}) = \min_{M \in \mathcal{P}} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

Si H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, on a $d(A, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{AH}\|$.

Démonstration : Exercice ■

3. Équations d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Soit $A(a_1, a_2, a_3)$ un point de $\mathbb{R}^3$. Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Comme pour les droites de $\mathbb{R}^2$, on obtient **l'équation paramétrique** du plan $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, en écrivant en coordonnées la relation de définition du plan. On obtient $M(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = a_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad \text{pour } t \text{ et } s \in \mathbb{R}$$

Remarque: Pour l'équation paramétrique d'un plan, il y a donc 2 paramètres !

Pour obtenir **l'équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$, on calcule les paramètres s et t à l'aide de deux des équations puis on injecte leur valeur dans la 3ème équation. On obtient une équation de la forme $ax + by + cz = d$ avec a, b, c non tous nuls.

Pour passer de l'équation cartésienne à l'équation paramétrique, on choisi deux coordonnées comme paramètres et on injecte dans l'équation cartésienne pour obtenir la 3ème coordonnée en fonction de ces paramètre. Par exemple si a est non nul, on pose $y = t$, $z = s$ et avec l'équation cartésienne, on a $x = \frac{d - bt - cs}{a}$.

Proposition et définition 1.51

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$. Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est un vecteur $n \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tous points M et $P \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{MP} \perp n$.

Si l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $ax + by + cz = d$, $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration : Identique à celle d'une droite de $\mathbb{R}^2$. ■

Définition 1.52

On dit que deux plans sont perpendiculaires si leur vecteurs normaux sont orthogonaux.

Chapitre 2

Nombres complexes

I. Forme algébrique

1. Parties réelles et imaginaires

Définition 2.1

Les nombres complexes sont les nombres de la forme $z = a + ib$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ et i vérifiant la relation $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque: On a donc $a + ib = \tilde{a} + i\tilde{b}$ si et seulement si $a = \tilde{a}$ et $b = \tilde{b}$.

Définition 2.2

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

On dit que a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$, et b la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

On dit que z est un réel si $b = 0$ et que z est un imaginaire pur si $a = 0$ et $b \neq 0$.

Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Définition 2.3

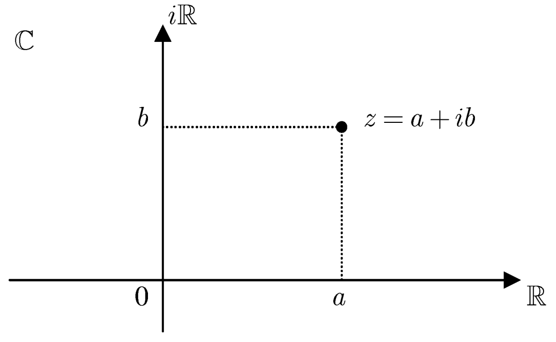
On appelle point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ le point M de coordonnées (a, b) avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. On note $M(z)$ pour signifier que M est le point d'affixe z.

De même, on définit l'affixe du vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme le nombre complexe, $z = a + ib$.

Pour les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc $z_B - z_A$.

Remarque:

Par la notion d'affixe, à tout nombre complexe correspond un point du plan et à tout point correspond un nombre complexe. Cela permet de visualiser $\mathbb{C}$ tel un plan :



Définition 2.4

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On définit la somme et le produit par

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

On note $-z = (-a) + i(-b)$ et on définit donc ainsi la soustraction entre deux nombres complexes par $z - z' = z + (-z')$.
Enfin, si $z \neq 0$, on définit l'inverse de z par $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{C}$. C'est l'unique complexe tel que $z\frac{1}{z} = 1$. Ceci permet de définir la division entre deux nombres complexes par $\frac{z'}{z} = z'\frac{1}{z}$.

Proposition 2.5

On retrouve les mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication que dans $\mathbb{R}$ à savoir, associativité, commutativité, distributivité, etc.

Proposition 2.6

Pour z et $z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z'), \quad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z').$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Im}(z)$.

Démonstration : Ecrire $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et calculer ! ■

Remarque: Attention, pour z et $z' \in \mathbb{C}$ quelconques, on n'a pas $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$!!! La formule est en fait bien plus compliquée (et inutile) : $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z')\,\mathrm{Re}(z)$.

2. Conjugué

Définition 2.7

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 2.8

Pour z et $z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \text{ si } z \neq 0.$$

Démonstration : Ecrire $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ et calculer ! ■

Proposition 2.9 (*Quelques formules pour les calculs*)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z),$$
$$z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}.$$

Démonstration : En effet, si $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ d'où les résultats en calculant. ■

II. Calculs algébriques

1. Sommes et produits

Notation 2.10

On introduit les notations suivantes : Pour $a_1,, \ldots, a_n$ des nombres complexes,

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{n} a_k = a_p a_{p+1} \cdots a_n.$$

La somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$ désigne la même chose que $\sum_{j=1}^{n} a_j$. L'indice de sommation (k ou j ici) est une variable muette.

Exemple:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + \cdots + n &= \sum_{k=1}^{n} k \\
10 + 15 + 20 + \cdots + 5p &= \sum_{k=2}^{p} 5k \\
-10 - 8 - 6 - 4 - 2 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 &= \sum_{k=-5}^{5} 2k \\
e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} &= \sum_{k=1}^{n} e^{kx} \\
1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n &= \prod_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

Proposition 2.11

Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres complexes. Par commutativité,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$$

Proposition 2.12 (*Sommation par paquets*)

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. Par associativité, pour tout $p \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

Exemple: Somme télescopique :

$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=p+1}^{q+1} a_j - \sum_{k=p}^{q} a_k = a_{q+1} - a_p$$

Proposition 2.13

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Par distributivité, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Remarque: Attention, on ne peut rien dire de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$!

2. Formule de la somme géométrique

Proposition 2.14

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Démonstration : On a $(1-a)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n}(a^k - a^{k+1}) = 1 - a^{n+1}$ car c'est une somme télescopique. D'où le résultat. ■

3. Formule du binôme

Définition 2.15

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, \ldots, n\}$.
On note $n! = n(n-1)\ldots 2 \times 1$ et $0! = 1$. On dit n factoriel ou factoriel n.
Le coefficient binomial est défini par $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. On le note aussi C_n^p.
Par convention, on note $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$ si $p \notin \{0, \ldots, n\}$.

Proposition 2.16

- *Formule du triangle de Pascal :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le triangle de Pascal

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 2.17 (*Formule du binôme de Newton*)

Pour tout x et $y \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Démonstration : Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec la formule du triangle de Pascal. ■

Remarque: On rappelle que $(x-y)^n = (x+(-y))^n$ et que $(-1)^n = 1$ si n est pair et -1 si n est impair, la formule ci-dessus permet donc de développer aussi les différences !

Exemple:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0 \text{ si } n \geq 1.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Proposition 2.18

Soient a et b des nombres réels. Alors $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

III. Forme exponentielle

1. L'exponentielle complexe

Notation 2.19

On définit l'**exponentielle complexe** d'un nombre réel $\theta \in \mathbb{R}$ par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemple:

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{2i\pi} = 1.$$

Proposition 2.20

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

- *L'exponentielle complexe est 2π-périodique, c'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$.*
- $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos\theta$ *et* $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin\theta$.
- *Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$.*

Démonstration : Trivial ! ∎

Proposition 2.21 (*Formule d'Euler*)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration : Immédiate d'après la définition. ∎

Exemple: Linéarisation de sinus et cosinus.

Si on souhaite linéariser $\cos^3(\theta)$, c'est à dire l'exprimer en fonction de $\cos(\lambda\theta)$ et de $\sin(\mu\theta)$ mais sans puissance (pour intégrer par exemple), on écrit

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \text{ d'après la formule d'Euler} \\
&= \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) \text{ d'après la formule du binôme} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \text{en réunissant les puissances “similaires”} \\
&= \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)) \text{ d'après la formule d'Euler.}
\end{aligned}$$

Proposition 2.22

Pour tous nombres θ et θ', on a $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

Démonstration : D'après les règles sur les sommes de cos et sin. ∎

Remarques:

- En pratique, on retrouve les formules sur le cosinus ou le sinus d'une somme à partir de cette formule plus facile à retenir !

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ia}e^{ib}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left((\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)\right) \\
&= \cos a\cos b - \sin a\sin b.
\end{aligned}$$

- Si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\bar{z} = e^{-i\theta}$. Donc $z\bar{z} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$ donc $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Théorème 2.23 (*Formule de Moivre*)

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. On en déduit donc la formule de Moivre :

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

Exemple: Pour exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, on utilise la formule de Moivre avec $n = 2$:

$$(\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\cos x\sin x = \cos(2x) + i\sin(2x)$$

donc $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ et $\sin(2x) = 2\cos x\sin x$ par identification de la partie réelle et de la partie imaginaire.

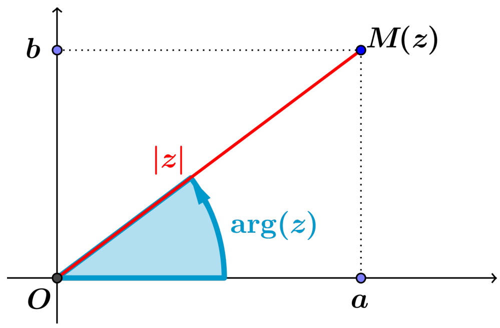
2. Module et argument

Définition 2.24

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est définie par $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ et noté $|z|$.
L'argument d'un nombre complexe $z = a + ib \neq 0$ est défini modulo 2π par $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et noté $\arg z$.



Remarque: Pour un nombre réel, le module et la valeur absolue coïncide, il n'y a donc pas de problème de notation.

Proposition 2.25

Par définition de l'argument et du module, tout nombre complexe non nul peut s'écrire de manière unique comme le produit de son module par l'exponentielle de son argument : $z = |z|e^{i\arg z}$.
On peut donc identifier module et argument, c'est à dire que :
$\rho e^{i\theta} = \tilde{\rho}e^{i\tilde{\theta}}$ *si et seulement si* $\rho = \tilde{\rho}$ *et* $\theta \equiv \tilde{\theta} \quad [2\pi]$.

Démonstration : D'après la définition. ∎

Proposition 2.26

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. *On a les propriétés suivantes :*

- z *est réel ssi* $\arg z = 0 \quad [\pi]$.
- z *est imaginaire pur ssi* $\arg z = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
- $|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{i\theta}$ *pour un* $\theta \in \mathbb{R}$.
- $z\overline{z} = |z|^2$ *et* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Démonstration : D'après la définition. ∎

Proposition 2.27

Soient z *et* z' *deux nombres complexes. On a*

$$\begin{gathered} |zz'| = |z||z'|, \quad |z^n| = |z|^n, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad |\overline{z}| = |z|, \quad |-z| = |z|, \\ \arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg(z^n) = n\arg z \quad [2\pi], \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi], \quad \arg\overline{z} = -\arg z \quad [2\pi], \\ \arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]. \end{gathered}$$

Démonstration : En écrivant $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, on a $zz' = \rho\rho' e^{i\theta}e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$ d'où les premières formules en identifiant modules et arguments. Les autres formules se démontrent de même. ∎

Remarques:

- Attention, on ne peut rien dire de $\arg(z + z')$!
- Attention aux divisions de modulo, si $\arg z^2 = \theta$, alors $\arg z = \frac{\theta}{2} \quad [\pi]$!

Proposition 2.28 (*Inégalité triangulaire*)

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Démonstration : Pour z et $z' \in \mathbb{C}$, on calcule que $|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z'})$ mais $\mathrm{Re}(z\bar{z'}) \leq |z\bar{z'}| = |z||\bar{z'}| = |z||z'|$ donc $|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$. D'où le résultat en prenant la racine carrée (car les deux nombre sont positifs). ■

Corollaire 2.29 (*Inégalité triangulaire inversée*)

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|.$$

Démonstration : Démonstration similaire au cas réel. ■

3. Éléments de géométrie du plan complexe

Proposition 2.30

Pour un vecteur u d'affixe $\rho e^{i\theta}$, on a $\rho = \|u\|$ et $(\overrightarrow{\imath}, u) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Démonstration : Il suffit de calculer ! ■

Proposition 2.31

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points du plan complexe. On suppose $A \neq B$ et $C \neq D$.

1. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$;
2. *A, B, C, D sont alignés ssi* $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$;
3. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ *ssi* $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ *est imaginaire pur.*

Démonstration : D'après les règles de calcul pour l'argument, on a
$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\imath}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$
Les points suivants découle clairement de cette égalité. ■

IV. Transformations du plan

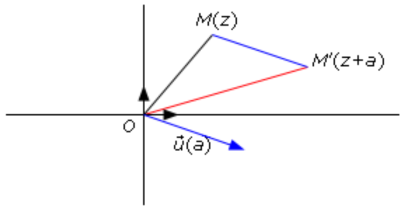
Définition 2.32

Une transformation du plan est une bijection du plan $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. Un complexe pouvant être interprété géométriquement comme l'affixe d'un point du plan $\mathbb{R}^2$, à toute bijection $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on peut faire correspondre une transformation du plan et réciproquement.

1. Translation

Définition 2.33

Une translation de vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ est une application $\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & M & \longmapsto & T(M) = M' \end{array}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = u$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2$.



Proposition 2.34

Si le vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ a pour affixe $a \in \mathbb{C}$, la translation de vecteur u s'écrit en terme d'affixe comme $\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & z' = z + a \end{array}$.

Démonstration : En effet, si M est d'affixe z, M' d'affixe z' et u d'affixe a, la relation $\overrightarrow{MM'} = u$ s'écrit $z' - z = a$ c'est à dire $z' = z + a$. ∎

Méthode 4 (*Reconnaître une translation*)

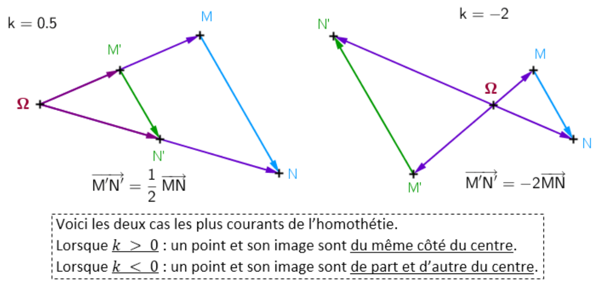
1. Une translation n'a aucun point fixe donc l'équation $z = f(z)$ ne doit pas avoir de solution.
2. En calculant $f(z) - z$, on trouve un nombre complexe constant, c'est l'affixe du vecteur de la translation.

Exemple: On considère la transformation du plan complexe définie par $f(z) = z + \frac{1}{1+i\sqrt{3}}$. C'est une translation de vecteur u d'affixe $\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. Homothétie

Définition 2.35

Une homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une transformation du plan $\begin{array}{ccccc} H & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & M & \longmapsto & H(M) = M' \end{array}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2$.



Proposition 2.36

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ s'écrit en terme d'affixe comme $\begin{array}{ccccc} H & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & z' = \omega + k(z - \omega) \end{array}$. *En particulier, $z' - \omega = k(z - \omega)$.*

Démonstration : En effet, si M est d'affixe z, M' d'affixe z' et Ω d'affixe ω, la relation $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ s'écrit $z' - \omega = k(z - \omega)$ c'est à dire $z' = \omega + k(z - \omega)$. ∎

Méthode 5 (*Reconnaître une homothétie*)

On considère $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et on cherche a savoir si c'est l'expression d'une homothétie.

1. Une homothétie admet un unique point fixe (sauf celle de rapport 1, mais elle a peu

d'intérêt) donc l'équation $z = f(z)$ doit avoir un unique solution. La solution sera notée ω, c'est l'affixe du centre de l'homothétie.

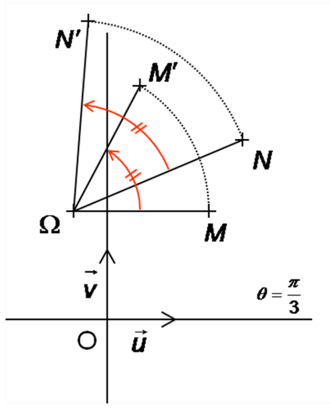
2. On "calcule" alors $\frac{f(z)-\omega}{z-\omega}$ et on doit trouver un nombre réel constant k, c'est le rapport de l'homothétie.

Exemple: On considère la transformation du plan complexe définie par $f(z) = -2z + 2 + 4i$.
On commence par chercher si f a des points fixes :

$$f(z) = z \Leftrightarrow -2z + 2 + 4i = z \Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + i\frac{4}{3}.$$

Il y a donc bien un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{2}{3} + i\frac{4}{3}$
On calcule alors $f(z) - \omega = -2z + 2 + 4i - (\frac{2}{3} + i\frac{4}{3}) = -2z + \frac{4}{3} + i\frac{8}{3} = -2(z - \frac{2}{3} - i\frac{4}{3}) = -2(z - \omega)$.
On a donc bien une homothétie de centre Ω et de rapport -2.

3. Rotations



Définition 2.37

Une rotation de centre Ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est une transformation du plan $\begin{array}{rccl} R & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & M & \longmapsto & R(M) = M' \end{array}$ tel que $\Omega M' = \Omega M$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2$ et l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$ pour tout $M \neq \Omega$.

Proposition 2.38

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}^*$ s'écrit en terme d'affixe comme $\begin{array}{rccl} R & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega) \end{array}$. *En particulier, $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.*

Démonstration : En effet, si M est d'affixe z, M' d'affixe z' et Ω d'affixe ω, la relation $\Omega M' = \Omega M$ s'écrit $|z' - \omega| = |z - \omega|$ ou encore si $z \neq \omega$ $\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$. Et la relation $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$ s'écrit $\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ donc $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ et on obtient bien les formules ci-dessus. ■

Méthode 6 (*Reconnaître une rotation*)

On considère $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et on cherche a savoir si c'est l'expression d'une rotation.

1. Une rotation admet un unique point fixe (sauf celle d'angle $0\ [2\pi]$, mais elle a peu d'intérêt) donc l'équation $z = f(z)$ doit avoir un unique solution. La solution sera notée ω, c'est l'affixe du centre de la rotation.
2. On "calcule" alors $\frac{f(z)-\omega}{z-\omega}$ et on doit trouver $e^{i\theta}$. Alors c'est une rotation de centre Ω et d'angle θ.

Exemple: On considère la transformation du plan complexe définie par $f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + \frac{2+\sqrt{2}}{2} + i\frac{4-3\sqrt{2}}{2}$.
On commence par chercher si f a des points fixes :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + \frac{2+\sqrt{2}}{2} + i\frac{4-3\sqrt{2}}{2} = z \Leftrightarrow 2z - \sqrt{2}(1+i)z = (2+\sqrt{2}) + i(4-3\sqrt{2}) \Leftrightarrow z = 1 + 2i.$$

Il y a donc bien un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$

On calcule alors $f(z)-\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}\big((1+i)z+1-3i\big)$ et on veut obtenir $f(z)-\omega = e^{i\theta}(z-\omega) = e^{i\theta}(z-1-2i)$. Il faut donc essayer d'identifier. En regardant, le coefficient devant z, on constate que la seule possibilité est d'avoir $e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, c'est à dire $\theta \equiv \frac{p}{i}4\ [2\pi]$. Il reste maintenant à vérifier que $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(-1-2i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-3i)$, c'est à dire $(1+i)(-1-2i) = 1-3i$ et c'est bien le cas, on a donc $f(z)-\omega = e^{i\frac{p}{i}4}(z-1-2i)$ et f est bien une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

V. Résolution d'équations complexes

1. Équations de degré deux

Dans le cas des équations de degré 2, on peut trouver les solutions autrement :

Méthode 7

Trouver les racines carrées Pour résoudre $z^2 = a + ib$ (dans le cas où $a + ib$ ne se met pas facilement sous forme polaire cf partie suivante), on pose $z = x + iy$.

1. On identifie partie réelle et partie imaginaires dans l'équation : $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$
2. On utilise l'égalité des modules dans l'équation qui s'écrit $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.
3. Avec ces équations, on trouve facilement x^2 et y^2.
4. On en déduit les signes possibles en utilisant $2xy = b$. On trouve 2 solutions.

Exemple: Résoudre $z^2 = 2i$.

On choisit de passer par la forme cartésienne. On pose donc $z = x + iy$.

1. En identifiant parties réelles et imaginaires ainsi que le module, on obtient

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

2. En utilisant la 1ère et la 3ème équation, on a $x^2 = 1$ et $y^2 = 1$, donc $x = \pm 1$ et $y = \pm 1$.
3. D'après la 2ème équation, on a $xy > 0$. On en déduit $z = 1 + i$ ou $z = -1 - i$.

Proposition 2.39

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. L'équation $z^2 = \Delta$ admet deux solutions complexes δ et $-\delta$, les solutions sont donc

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Démonstration : Comme dans $\mathbb{R}$, on écrit $az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta^2}{4a^2}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta^2}{4a^2}\right)$. D'où les solutions. ∎

Exemple: Par exemple l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ a comme solutions $1 + i, 1 - i$.

Remarque: On est capable de résoudre explicitement toute équation de degré 2, alors que ce n'est pas le cas si n est plus grand !

2. Résolution pratique de $z^n = a$

Proposition 2.40

Soient θ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.
On rappelle que si $n\theta = \theta' \quad [2\pi]$, alors $\theta = \frac{\theta'}{n} \quad [\frac{2\pi}{n}]$.

Démonstration : Par définition du modulo, $n\theta = \theta' \quad [2\pi]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \theta' + 2k\pi$ donc en divisant par n, on a qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{\theta'}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ ce qui signifie $\theta = \frac{\theta'}{n} \quad [\frac{2\pi}{n}]$. ■

Méthode 8

Pour résoudre $z^n = a$, en général, on met a et z sous leur forme polaire $a = re^{i\omega}$ et $z = \rho e^{i\theta}$, puis on identifie alors les modules et arguments (attention aux divisions de modulo 2π !).

Exemple: Résoudre $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$. On pose $a = 4\sqrt{2}(1+i)$.

1. On écrit a sous forme polaire : $a = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. On pose $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
3. En réécrivant l'équation, on obtient donc $\rho^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$.
4. On identifie les modules et les arguments (sans oublier le “modulo” !) :
$$\rho^3 = 8 \quad \text{et} \quad 3\theta = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi].$$
5. On résout ces équations : $\rho = \sqrt[3]{8} = 2$ car $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta = \frac{\pi}{12} \quad [\frac{2\pi}{3}]$.
6. On liste enfin toutes les solutions :$z = 2e^{i(\frac{\pi}{12}+2k\frac{\pi}{3})} = 2e^{i\pi\frac{1+8k}{12}}$ avec $k = 0, 1$ ou 2. Donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $z = 2e^{i\frac{9\pi}{12}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $z = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$. Il y a 3 solutions.

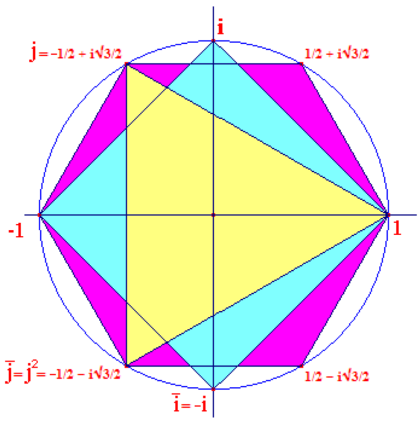
3. Racines n-ième de l'unité

Définition 2.41

On appelle racine n-ème de l'unité tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.

Proposition 2.42

Il existe n racines n-ème de l'unité, ce sont les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.
Les racines n-ème de l'unité forment un polygone régulier dans le plan complexe.



Exemple: Les racines de $z^2 = 1$ sont donc $1 = e^{i0}$ et $-1 = e^{\frac{2i\pi}{2}}$.
Les racines de $z^3 = 1$ sont $1 = e^{i0}$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ que l'on note j. Enfin la dernière racine est $e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$.

Remarque: Les multiples écritures des racines n-èmes de l'unité.
Selon le contexte, il peut être intéressant d'écrire les racines n-èmes de l'unité d'une façon ou d'une autre.

- Si on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $\mathbb{U}_n = \{\omega^0 = 1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$.

- On a aussi $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z} \text{ avec } a \leq k < a+n\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En effet, chaque élément de l'ensemble est bien solution de $z^n = 1$ et on a bien n racines distinctes.
  En particulier, si n est impair, on écrit souvent $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ -\frac{n-1}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2}\}$.

Proposition 2.43

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.

Si z_0 vérifie ${z_0}^n = a$, alors z est solution de $z^n = a$ si et seulement si $z = z_0\omega$ avec ω une racine n-ème de l'unité.

En conséquence, l'équation $z^n = a$ admet n racines complexes de même module.

Démonstration : On a bien $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \frac{a}{a} = 1$ d'où le résultat. ■

Remarque: Pour résoudre $z^n = a$, dans le cas (rare) où on connaît une solution particulière par exemple $z = z_0$, on obtient toutes les solutions en multipliant cette solution particulière par les racines n-ème de l'unité : $z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Chapitre 3

Polynômes

I. Les polynômes

1. Définitions

Définition 3.1

Un polynôme à une variable est une expression de la forme

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

où X est un symbole appelé indéterminée ou variable du polynôme. Les a_i sont les coefficients.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

Définition 3.2

La fonction polynôme associée à $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ est l'application notée par abus $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$.

Remarque: Ne pas confondre polynôme, qui est une suite finie de coefficients comme un vecteur mais avec des règles de calcul différentes, et fonction polynôme, qui est une application.

Définition 3.3

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ avec $a_n \neq 0$, on dit que P est de degré n et on note $\deg P = n$, a_n est appelé coefficient dominant de P et si $a_n = 1$, on dit que P est unitaire.

Notation 3.4

Par convention, le polynôme nul $P = 0$ est de degré $-\infty$.

Exemple: $P = 3X^2 + 2$, alors $\deg(P) = 2$. $Q = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - 4X + e$ est unitaire de degré 5. $R = 2$ est de degré 0.

Définition 3.5 (*Somme et produit*)

On effectue la somme et le produit de polynômes comme pour les fonctions classiques. En regroupant les termes de même degré, on peut si besoin écrire les formules générales : Si $P = a_0 + \cdots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + \cdots + b_mX^m$, alors on définit la somme de P et Q par

$$P + Q = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)X^i$$

et le produit de P et Q par

$$PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i\right) = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}\right) X^j$$

en posant $a_i = 0$ pour $i > n$ et $b_j = 0$ pour $j > m$.

Définition 3.6 (*Composée et dérivée*)

Si $P = a_0 + \dots a_n X^n$ et $Q = b_0 + \dots + b_m X^m$, alors on définit le polynôme dérivé de P par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} n a_n X^{n-1}$$

et on définit la composée de P par Q par

$$P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{m} b_i X^i\right)^k$$

Lemme 3.7

Pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ on a

$$\deg(P+Q) \le \max(\deg(P), \deg(Q)),$$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q),$$
$$\deg(P') = \deg(P) - 1 \textit{ si } \deg(P) \ge 1,$$
$$\deg(P(Q)) = \deg(P)\deg(Q).$$

Démonstration : D'après les formules ci-dessus. ∎

Exemple: Attention, l'inégalité dans le degré d'une somme peut être stricte : $X^2 + 1 + (-X^2 + 3X) = 3X + 1$.

2. Division euclidienne

Théorème 3.8

Soient A, B deux polynômes avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple de polynômes Q, R vérifiant

$$A = BQ + R \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement le **quotient** *et le* **reste** *de la division de A par B. Si $R = 0$, on dit que B divise A ou que A est un multiple de B.*

Démonstration : Pour l'unicité supposons que $BQ+R = BQ'+R'$, on arrive à la relation $B(Q-Q') = R'-R$ et on utilise la condition sur le degré pour en déduire $\deg(R-R') \le \deg B$, donc nécessairement $Q = Q'$ et donc $R = R'$.

Pour l'existence on le prouve par récurrence forte sur le degré de A sachant que le cas $\deg(B) < \deg(A)$ est évident. Soit donc X^n avec $n > \deg(B)$. Définissons C par $C = X^n - 1/aX^{n-\deg(B)}B$ avec

a coefficient dominant de B. Le terme de C d'ordre n vaut 0 donc $\deg(C) \leq n-1$ et on applique l'hypothèse de récurrence. ■

Exemple: On effectue la division de X^5 par $3X^2+4$. On trouve

$$X^5 = (3X^2+4)(1/3X^3 - 4/9X) + 16/9X.$$

Remarques: Remarquons les faits suivants :
- Toute constante non nulle divise un polynôme.
- P divise toujours P.
- La division dépend de l'ensemble où vivent les coefficients. X^2+1 n'admet comme diviseur dans $\mathbb{R}[X]$ que les constantes, or dans $\mathbb{C}[X]$ $X-i$ le divise car $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.

II. Racines d'un polynôme

1. Définition

Définition 3.9

On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une **racine** de $P \in \mathbb{K}[X]$ si la fonction polynôme associée à P vérifie $P(a) = 0$.

Remarque: Tout dépend quel ensemble on considère : le polynôme X^2+1 n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes. De même X^2-2 a deux racines réelles mais pas de racine rationnelle.

Lemme 3.10

Soit P un polynôme, a est une racine de P si et seulement si $X-a$ divise P.

Démonstration : On effectue la division de P par $X-a$. Alors $P = Q.(X-a)+R$ mais $\deg(R) < 1$ donc R est une constante et en prenant la fonction polynôme en a, on a $P(a) = R(a) \in \mathbb{K}$ donc $P = Q.(X-a) + P(a)$. On a donc $(X-a)$ divise P si et seulement si $P(a) = 0$ c'est à dire ssi a est racine de P. ■

Corollaire 3.11

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ sont des racines distinctes de $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\prod_{i=1}^k X - \alpha_i$ divise P.

Démonstration : Comme α_1 est racine de P, il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q_1.(X-\alpha_1)$. On a donc $P(\alpha_2) = 0 = Q_1(\alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_1)$. Comme $\alpha_2 \neq \alpha_1$, α_2 est nécessairement racine de Q_1 donc il existe $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q_2.(X-\alpha_2)(X-\alpha_1)$. On recommence en calculant $P(\alpha_3)$ et comme $\alpha_3 \neq \alpha_1, \alpha_2$, α_3 est racine de Q_2. Ainsi de suite. A la fin, on a $P = Q_k \prod_{i=1}^k X - \alpha_i$ d'où le résultat. ■

Corollaire 3.12

Un polynôme de degré n a au plus n racines.

Démonstration : On utilise le lemme précédent, et le fait que le produit de $(X-a_i), 1 \leq i \leq n$ est de degré n. ■

Proposition 3.13

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P

Démonstration : On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.Comme α est racine, on a $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$ mais en prenant le conjugué, on a

$$\overline{P(\alpha)} = 0 = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{\alpha}^k = P(\bar{\alpha})$$

d'après les règles de sommation et multiplication du conjugué et puisque $\bar{a}_k = a_k$. Donc $\bar{\alpha}$ est racine de P. ■

2. Relations coefficients-racines

Proposition 3.14

Soit $P = X^2 + pX + q$. Soient α et β ses racines. Alors $\alpha\beta = q$ et $\alpha + \beta = -p$.

Démonstration : On développe l'égalité $P = X^2 + pX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$ et on identifie les coefficients. ■

Proposition 3.15

Soit $n \geq 2$. Les n racines n-ième de l'unité $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ sont les racines complexes du polynôme $X^n - 1$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0 \quad et \quad \prod_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n+1}$$

Démonstration : Comme les w_k sont les racines, on a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - w_k)$. Il suffit alors de développer et d'identifier les coefficients en X^{n-1} et les termes constants pour obtenir les formules. ■

Remarque: L'autre formule classique avec les racines n-ème vient de la formule de la somme géométrique

$$X^n - 1 = (X - 1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

D'autre part, en factorisant $X^n - 1$ par ses racines, on a

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - w_k) \text{ avec } w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Donc en divisant par $X - 1$ et en identifiant, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1}(X - w_k)$.

3. Multiplicité

Définition 3.16

On dit que α est une **racine de multiplicité** k si $(X-\alpha)^k$ divise P et que $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. Si la multiplicité vaut 1 on parle de **racine simple**, sinon on parle de **racine multiple**.

Théorème 3.17

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $a \in \mathbb{C}$. On a

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$$

où $P^{(k)}(a)$ désigne la dérivée k-ème de la fonction polynôme prise en a.

Démonstration : Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on écrit la dérivée j^{e} de P :

$$P^{(j)} = \sum_{k=j}^{n} a_k k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j}.$$

Donc $P^{(j)}(0) = a_j j!$ d'où le résultat pour $a = 0$. Ensuite on considère le polynôme $P(X+a)$ auquel on applique la formule en 0 et on obtient bien la formule. ■

Corollaire 3.18

Soit P un polynôme complexe, α un nombre complexe et k un entier. On a équivalence entre

i) α *est racine de P de multiplicité k.*

ii) $P(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$

Démonstration : Conséquence du théorème précédent pour une implication. L'autre sens vient du calcul des dérivées de $(X-\alpha)^k R(X)$. ■

Exemple: Soit $P = X^3 - 5X^2 + 7X - 3$.
Montrer que 1 et 3 sont racines doubles et simples de P.

III. Polynômes irréductibles

Définition 3.19

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est **irréductible** s'il ne peut s'écrire comme produit de polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque: Ainsi les polynômes de degré un sont toujours irréductibles, de même pour le polynôme $X^2 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.

Lemme 3.20

Soit P un polynôme de degré au moins deux.

- *Si P est irréductible, alors il n'a pas de racine (dans $\mathbb{K}$).*
- *S'il est de degré deux ou trois, alors il est irréductible si et seulement s'il n'a pas de racine.*

Démonstration : C'est un corollaire du lemme précédent pour le premier point. Pour le deuxième, on calcule. ∎

Remarque: Le deuxième point du lemme est faux si le degré vaut quatre comme le montre l'exemple : $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.21

> *Tout polynôme non constant se décompose comme produit de polynômes irréductibles.*

Démonstration : Par récurrence forte sur le degré du polynôme. ∎

Exemple: On a $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$. On calcule les racines cinquièmes de l'unité et on voit qu'il existe a réel tel que.

$$X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 - 2aX + 1)(X^2 + 2aX + 1).$$

Remarque: Il existe sur $\mathbb{Q}$ des polynômes irréductibles de tout degré non nul.

Cette décomposition n'est pas unique puisqu'il suffit de multiplier un des polynômes par une constante, et de diviser un autre par la même constante.

Théorème 3.22 (*de d'Alembert*)

> *Tout polynôme non constant admet une racine complexe.*

Démonstration : Admis car dur. ∎

Corollaire 3.23

> *Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$, non constant, sont les polynômes de degré un.*
>
> *Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$, non constant, sont de degré un, ou de degré deux sans racine réelle.*

Démonstration : Conséquence du théorème précédent.

Et si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P = \prod(X - \alpha_i)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ mais $\bar{P} = P$ donc $\bar{\alpha}_i = \alpha_j$ d'où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ou il existe $i \neq j$ tel que $\bar{\alpha}_i = \alpha_j$. Bref on peut récrire P sous la forme

$$P = \prod(X - \alpha_k) \prod(X - \beta_i)(X - \bar{\beta}_i) = \prod(X - \alpha_k) \prod(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta_i)X + |\beta_j|^2).$$

∎