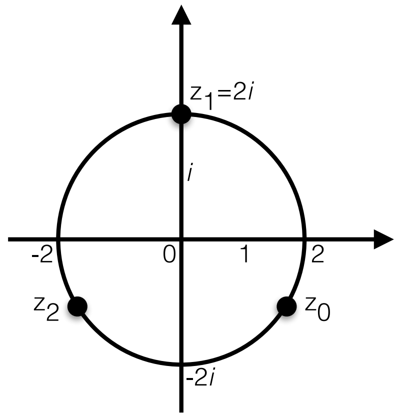
[Le texte entre crochets ne fait pas partie du corrigé : il s'agit de variantes ou de vérifications.]

Exercice 1

1. Pour $u = -2+2i$, on a $|u| = 2\sqrt{2}$, d'où $u = 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
   Pour $u' = -\sqrt{3} - i$, on a $|u'| = 2$, d'où $u' = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\,e^{i\frac{-5\pi}{6}}$.
   [On pouvait aussi répondre : $u' = 2\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$.]
2. Pour $z = x+iy$, on a $z^2 = 8+6i$ lorsque les deux équations suivantes sont satisfaites :
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ 2xy = 6. \end{cases}$$
   Comme $|8+6i| = 10$, on sait que x^2 et y^2 sont solutions du système linéaire suivant :
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = 8, \end{cases} \text{ d'où } x^2 = \frac{10+8}{2} = 9 = 3^2 \text{ et } y^2 = \frac{10-8}{2} = 1 = 1^2.$$
   Comme $2xy = 6$, on sait que x et y ont le même signe : les racines carrées de $8+6i$ sont donc $\pm(3+i)$.
   [On a bien $(3+i)^2 = 3^2 - 1 + 2\times 3i = 8+6i$.]
3. Le discriminant de l'équation $(1-i)z^2 + (3-3i)z + 2 - 4i = 0$ vaut :
   $$\Delta = (3-3i)^2 - 4(1-i)(2-4i) = 3^2 - 3^2 - 2\times 3^2 i - 4\times 2 + 4^2 + 4^2 i + 4\times 2i = 8+6i.$$
   D'après la question précédente, on obtient les deux solutions $\dfrac{3i-3\pm(3+i)}{2(1-i)}$, c'est-à-dire :
   $$\frac{4i}{2(1-i)} = \frac{4i(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{-4+4i}{4} = -1+i, \quad \frac{2i-6}{2(1-i)} = \frac{(2i-6)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{-8-4i}{4} = -2-i.$$
   [$(-1+i)^2 = -2i$ et $(1-i)(-2i) + (3-3i)(-1+i) + 2 - 4i = -2i - 2 - 3 + 3i + 3i + 3 + 2 - 4i = 0$.
   $(-2-i)^2 = 3+4i$ et $(1-i)(3+4i) + (3-3i)(-2-i) + 2 - 4i = 3 - 3i + 4i + 4 - 6 + 6i - 3i - 3 + 2 - 4i = 0$.]
4. On a $w = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
   Si on note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ la racine cubique primitive de l'unité, les trois racines cubiques de w sont :
   $$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, \qquad z_1 = jz_0 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \qquad z_2 = j^2 z_0 = jz_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i.$$
   [On a bien $z_0^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$, $z_1^3 = 8i^3 = -8i$, et $z_2^3 = -3\sqrt{3} - 9i + 3\sqrt{3} + i = -8i$.]



Exercice 2

1. En développant le produit, on obtient :
$$(1-z)\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k - \sum_{k=1}^{n} z^k = 1 - z^n, \text{ d'où } \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}.$$
2. Si $u \neq 1, -1$ et si on pose $z = u^2$ dans la formule précédente, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1} = u\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k} = u\frac{1-u^{2n}}{1-u^2}.$$
3. Si $u = e^{i\frac{\pi}{2n+1}}$, alors $u^{2n+1} = e^{i\pi} = -1$, et on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1} = u\frac{1-u^{2n}}{1-u^2} = \frac{u-u^{2n+1}}{1-u^2} = \frac{1+u}{(1-u)(1+u)} = \frac{1}{1-u}.$$
4. Si $u \neq 1$ et $|u| = 1$, alors $u\overline{u} = |u|^2 = 1$, et si on pose $v = \dfrac{1}{1-u}$, on obtient :
$$v + \overline{v} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-\overline{u}} = \frac{1-\overline{u}+1-u}{(1-u)(1-\overline{u})} = \frac{2-u-\overline{u}}{1-u-\overline{u}+u\overline{u}} = \frac{2-u-\overline{u}}{2-u-\overline{u}} = 1.$$
La partie réelle de $v = \dfrac{1}{1-u}$ est donc $\mathfrak{Re}(v) = \dfrac{v+\overline{v}}{2} = \dfrac{1}{2}$.
5. On remarque que $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}$ est la partie réelle de $u^{2k+1} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}$.
On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}$ est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1} = v$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$.
[On pouvait aussi appliquer la formule d'Euler $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}} + e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{2k+1}+\overline{u}^{2k+1}}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1} + \overline{\sum_{k=0}^{n-1} u^{2k+1}}}{2} = \frac{1}{2}.]$$

Exercice 3

1. On a $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.
2. Si P, P' sont les points d'affixes respectifs z, z', alors les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP'}$ sont les coordonnées des points P, P', c'est-à-dire :
$$x = \mathfrak{Re}(z) \text{ et } y = \mathfrak{Im}(z), \qquad x' = \mathfrak{Re}(z') \text{ et } y' = \mathfrak{Im}(z').$$
En appliquant la question précédente dans la formule $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = xx' + yy'$, on obtient :
$$\frac{(z+\overline{z})(z'+\overline{z'})}{4} + \frac{(z-\overline{z})(z'-\overline{z'})}{-4} = \frac{zz'+\overline{z}z'+z\overline{z'}+\overline{z}\overline{z'}-zz'+\overline{z}z'+z\overline{z'}-\overline{z}\overline{z'}}{4} = \frac{z\overline{z'}+\overline{z}z'}{2}.$$
[On pouvait aussi remarquer que si $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$, alors on a :
$$z\overline{z'}+\overline{z}z' = xx'+iyx'-ixy'+yy'+xx'-iyx'+ixy'+yy' = 2(xx'+yy').]$$
3. Si A, B, C sont les points d'affixes a, b, c où $|a| = |b| = |c|$, et H est le point d'affixe $h = a+b+c$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OP'}$ où P et P' sont les points d'affixes respectifs $b-a$ et $h-c = a+b$.
En appliquant la question précédente et le fait que $a\overline{a} = |a|^2 = |b|^2 = b\overline{b}$, on obtient :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = \frac{(b-a)(\overline{a}+\overline{b}) + (\overline{b}-\overline{a})(a+b)}{2} = \frac{b\overline{a}-a\overline{a}+b\overline{b}-a\overline{b}+\overline{b}a-\overline{a}a+\overline{b}b-\overline{a}b}{2} = 0.$$
Autrement dit, on a $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH}$.
4. En appliquant la question précédente à A, C puis à B, C, on obtient aussi $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} = 0$. Autrement dit, H est l'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.