Géométrie et arithmétique 1
PARTIEL 2 - CORRIGÉ

Exercice 1. Soient $z = 1 - i$ et $w = \sqrt{3} + i$.

[1 pt] 1. Écrire z et w sous forme polaire.

[1 pt] 2. Donner la forme polaire et la forme algébrique du nombre complexe $u = \dfrac{z^{12}}{w^3}$.

Solution : 1. Les complexes z et w étant non nuls, ils admettent une écriture polaire. Nous avons

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad |w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Notons $\theta_1 = \arg(z)$. Nous avons

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta_1 = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en déduit que $\arg(z) = -\pi/4\ [2\pi]$. De même, posons $\theta_2 = \arg(w)$. Nous obtenons

$$\cos\theta_2 = \frac{\mathrm{Re}(w)}{|w|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta_2 = \frac{\mathrm{Im}(w)}{|w|} = \frac{1}{2},$$

d'où $\arg(w) = \pi/6$. Nous avons obtenu

$$z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad w = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

2. Nous allons effectuer le calcul sous forme polaire et donnerons la forme algébrique ensuite.

$$u = \frac{z^{12}}{w^3} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}}{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3} = \frac{2^6 e^{-i\frac{12\pi}{4}}}{2^3 e^{i\frac{3\pi}{6}}} = 2^3 e^{i\left(-3\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 8e^{-i\frac{7\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i.$$

Exercice 2.

[2 pts] 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = 3 + 4i$.

[2 pts] 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation de second degré $iz^2 - 3iz - 1 + 3i = 0$. On écrira les résultats sous forme algébrique.

Solution : 1. On remarque que le nombre complexe $3+4i$ n'admet pas d'expression exponentielle explicite, nous allons donc effectuer le calcul sous forme algébrique. Posons $Z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. L'équation s'écrit

$$(x + iy)^2 = 3 + 4i \qquad \text{ce qui équivaut à} \qquad x^2 - y^2 + i2xy = 3 + 4i.$$

En comparant les parties réelles et imaginaires à gauche et à droite de cette dernière égalité, nous obtenons $x^2 - y^2 = 3$ et $2xy = 4$. De plus, la condition sur les modules $|Z|^2 = |3 + 4i|$ implique que $x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Nous devons résoudre le système de trois équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x^2 = 4 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Nous avons deux possibilités : $x = 2,\ y = 1$ ou $x = -2,\ y = -1$. Nous obtenons deux solutions

$$Z_1 = 2 + i \qquad ou \qquad Z_2 = -2 - i.$$

2. L'équation à résoudre est une équation de second degré à coefficients complexes de la forme

$$az^2 + bz + c = 0$$

avec $a = i$, $b = -3i$ et $c = -1 + 3i$. Calculons son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3i)^2 - 4i(-1 + 3i) = -9 + 4i + 12 = 3 + 4i.$$

On remarque qu'à la question précédente nous avons calculé les racines carrées Z_1 et Z_2 de ce nombre complexe. Nous pouvons donc donner les solutions de cette équation :

$$z_1 = \frac{-b + Z_1}{2a} = \frac{3i + 2 + i}{2i} = \frac{2 + 4i}{2i} = \frac{(2 + 4i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{8 - 4i}{4} = 2 - i$$

et

$$z_2 = \frac{-b + Z_2}{2a} = \frac{3i - 2 - i}{2i} = \frac{-2 + 2i}{2i} = \frac{(-2 + 2i)(-2i)}{2i(-2i)} = \frac{4 + 4i}{4} = 1 + i.$$

Exercice 3. Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

[1 pt] 1. Calculer z^2 sous forme algébrique $a + ib$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

[1 pt] 2. Mettre z^2 sous forme polaire $\rho e^{i\theta}$.

[1 pt] 3. En déduire la forme polaire de z.

[1 pt] 4. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

[1 pt] 5. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $z^n \in \mathbb{R}$?

Solution : 1. On effectue le calcul :

$$z^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} - \left(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(1 - i).$$

2. Cherchons le module et l'argument du nombre complexe z^2. Nous avons

$$|z^2| = 2\sqrt{2}|1 - i| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \quad \text{et} \quad \arg(z^2) = \arg(2\sqrt{2}(1 - i)) = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Au final, nous avons trouvé

$$z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

3. Nous savons que z est l'une des deux racines carrées de z^2, qui sont données par

$$2e^{-i\frac{\pi}{8}} \qquad \text{et} \qquad 2e^{-i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}.$$

Comme $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > 0$ et $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2 - \sqrt{2}} < 0$, nous en déduisons que

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}}.$$

4. Nous avons

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}} = z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} = 2\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\frac{\pi}{8} - 2\sin\frac{\pi}{8}.$$

En comparant les parties réelles et imaginaires à gauche et à droite, nous obtenons

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

5. On utilise la forme exponentielle de z trouvée ci-dessus :

$$z^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{8}}.$$

Ceci est un nombre réel si et seulement si $\dfrac{n\pi}{8}$ est un multiple entier de π, c'est-à-dire si et seulement si n est un entier divisible par 8.

Exercice 4. On définit la transformation du plan complexe $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz \end{array}.$

[1,5 pts] 1. Justifier que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

[1,5 pts] 2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1| = |f(z)|$.

Solution : 1. Nous avons $f(0) = 0$. De plus, pour tout $z \neq 0$ nous pouvons exprimer z sous forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ où $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$. Nous obtenons

$$f(re^{i\theta}) = ire^{i\theta} = re^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fixe l'origine du plan. Pour tout point différent de l'origine, f présèrve sa distance par rapport à l'origine mais augemente son argument de $\pi/2$. On constate que f est la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine.

2. On remarque que la condition $|z-1| = |f(z)|$ se traduit par

$$|z-1| = |iz| = |i| \cdot |z| = |z| = |z-0|.$$

Nous cherchons donc les points M qui se situent à distances égales par rapport aux points d'affixe $z = 0$ et $z = 1$. Ceci définit la médiatrice du segment $[0,1]$, c'est-à-dire la droite d'équation $\mathrm{Re}(z) = 1/2$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

[1 pt] 1. Énoncer la formule du binôme.

[1 pt] 2. Développer $(1+e^{i\theta})^3$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

[1 pt] 3. En utilisant la formule du binôme, montrer que $(1+e^{i\theta})^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

[2 pts] 4. Énoncer les formules d'Euler et montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On souhaite trouver toutes les valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \cos(n\theta)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{E}$$

[1 pt] 5. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = 2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

[2 pt] 6. Résoudre l'équation (E).

Solution : 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in \mathbb{C}$ nous avons

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}, \qquad \text{où} \quad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$(1+e^{i\theta})^3 = 1 + 3e^{i\theta} + 3(e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^3 = 1 + 3e^{i\theta} + 3e^{i2\theta} + e^{i3\theta}.$$

3. Appliquons la formule du binôme en posant $x = e^{i\theta}$ et $y = 1$. Nous obtenons

$$(1+e^{i\theta})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{i\theta})^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta},$$

car, grâce à la formule de Moivre, $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$.

4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les formules d'Euler donnent

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Nous avons

$$2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} = 2 \cdot \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(-\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\theta} + 1.$$

5. Nous savons que $\sin(k\theta) = \mathrm{Im}(e^{ik\theta})$. Ceci implique que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{Im}(e^{ik\theta}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Im}(1+e^{i\theta})^n = \mathrm{Im}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^n =$$

$$= \mathrm{Im}\left(2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{n\theta}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n\theta}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

6. Grâce aux questions précédentes, nous pouvons réécrire l'équation (E) sous la forme

$$2^n \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2^n \cos(n\theta) \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Nous avons deux possibilités :

$$(i) \ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad (ii) \ \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) = \cos(n\theta).$$

La condition (i) donne $\theta/2 = \pi/2 \ [\pi]$ ou de manière plus explicite $\theta = \pi \ [2\pi]$.
La condition (ii) se traduit par

$$n\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{n\theta}{2} \ [2\pi] \ \Leftrightarrow \ 2n\theta = \pi - n\theta \ [4\pi] \ \Leftrightarrow \ 3n\theta = \pi \ [4\pi] \ \Leftrightarrow \ \theta = \frac{\pi}{3n} \ \left[\frac{4\pi}{3n}\right]$$

ou

$$n\theta = \frac{n\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \ \Leftrightarrow \ 2n\theta = n\theta - \pi \ [4\pi] \ \Leftrightarrow \ n\theta = -\pi \ [4\pi] \ \Leftrightarrow \ \theta = -\frac{\pi}{n} \ \left[\frac{4\pi}{n}\right].$$

Finalement on obtient l'ensemble des solutions suivant :

$$\left\{\theta \in \mathbb{R} \ : \ \theta = \pi \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{3n} \ \left[\frac{4\pi}{3n}\right] \quad \text{ou} \quad \theta = -\frac{\pi}{n} \ \left[\frac{4\pi}{n}\right]\right\}.$$