Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2014-2015

Gie et arithmque

Partiel 2 – Novembre 2014

Calculette et documents non autorisDur 2 heures

Exercice 1

(Question de Cours) Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ et on a alors $\overline{z} = x - iy$ et $\overline{z'} = x' - iy'$.

On a $z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$ d'où $\overline{z+z'} = (x+x') - i(y+y')$. Par ailleurs on a $\overline{z} + \overline{z'} = (x-iy) + (x'-iy') = (x+x') - i(y+y')$, ce qui montre que $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Ensuite on a $zz' = (x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y)$ d'où $\overline{zz'} = (xx'-yy') - i(xy'+x'y)$. Par ailleurs on a $\overline{z}\,\overline{z'} = (x-iy)(x'-iy') = (xx'-yy') + i(-xy'-x'y)$ ce qui montre $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du rep orthonormO,,,).

1. Dire l'ensemble des points M de l'espace vfiant $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$.

L'égalité est satisfaite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et cela est le cas si et seulement si les points A, B et M sont alignés. L'ensemble des points M vfiant l'ation est donc la droite passant par A et B.

2. Dire l'ensemble des points M de l'espace vfiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

L'égalité est satisfaite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. Ceci arrive si et seulement si M appartient au plan orthogonal AB$etpassantpar$A.

3. Dire l'ensemble des points M de l'espace vfiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$.

L'égalité dit que la distance au carré entre A et M est la même que celle entre A et B. L'ensemble des points M (de l'espace !) vfiant l'ation est donc la sph de centre A et rayon $\|\overrightarrow{AB}\|$.

4. Dire l'ensemble des points M de l'espace vfiant $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.

En posant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ et en utilisant la distributivitu linitu produit vectoriel on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BM}$. Ceci implique que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal i-même ce qui, d'apres propris du produit scalaire, n'est possible que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Or cela n'est pas le cas car $A \neq B$ par hypoth, et donc aucun point M de l'espace ne vfie la condition.

Exercice 3

Rudre dans $\mathbb{C}$ l'ation

$$2z^2 + (1-2i)z - i = 0.$$

L'ation de degr$admetlesdeuxsolutionssuivantes$:$z_1 = \frac{-b-(x+iy)}{2a}$, $\quad z_2 = \frac{-b+(x+iy)}{2a}$oa=2,b=1-2i,$\pm(x+iy)$, $x, y \in \mathbb{R}$ sont les racines carr de $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $c = -i$.

Ici Δ vaut $(1-2i)^2 - 4 \times 2(-i) = (1-4-4i) + 8i = 1-4+4i$. Pour calculer ses racines carr on peut soit remarquer que $1-4+4i = (1+2i)^2$ soit rudre le syst

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

On trouve $x + iy = \pm(1+2i)$ ce qui donne

$$z_1 = -\frac{1}{2}, \qquad z_2 = i.$$

EXERCICE 4

En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 6\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ puis de $\cos\theta$ uniquement.

On remarque que $\cos 6\theta = \Re e(e^{6i\theta})$. On a $\cos 6\theta + i\sin 6\theta = e^{6i\theta} = (e^{i\theta})^6 = (\cos\theta + i\sin\theta)^6$. Il suffit alors de dlopper ce dernier binôme. On obtient

$$\cos^6\theta + 6i\cos^5\theta\sin\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta - 20i\cos^3\theta\sin^3\theta + 15\cos^2\theta\sin^4\theta + 6i\cos\theta\sin^5\theta - \sin^6\theta$$

dont la partie rle vaut

$$\cos^6\theta - 15\cos^4\theta\sin^2\theta + 15\cos^2\theta\sin^4\theta - \sin^6\theta = \cos 6\theta.$$

On remarque que $\sin\theta$ apparaît seulement avec de puissances paires. En remplat $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ et en dloppant on obtient

$$\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1.$$

EXERCICE 5

On consid l'ation (E) $\quad 1 + z^3 + z^6 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que z est solution si et seulement si $\bar{z}$ est solution.

Puisque deux nombres complexes sont ux si et seulement si leurs conjugue sont on a que l'lit+z$^3 + z^6 = 0$ est ivalente $\overline{1+\text{z}^3 + z^6} = \overline{0}$. En utilisant ce qui a montrns l'exercice 1, cette derni litvient $1 + \overline{z}^3 + \overline{z}^6 = 0$. Ceci montre bien que le nombre complexe z est solution de l'ation si et seulement si $\overline{z}$ l'est.

2. Rudre dans $\mathbb{C}$ l'ation : $1 + X + X^2 = 0$ (penser somme d'une suite gique).

On sait que $X^3 - 1 = (X-1)(1 + X + X^2)$. Les solutions de $X^3 - 1 = 0$ sont les trois racines cubiques de l'unit savoir $1 = e^{\frac{0i\pi}{3}}$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Par identification, les solutions de $1 + X + X^2 = 0$ sont $X_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $X_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. (Une autre possibilitt de rudre l'ation de degrar la mode usuelle, puis trouver la forme exponentielle des solutions obtenues.)

3. Donner toutes les solutions de (E) sous forme exponentielle.

En posant $X = z^3$ on voit que les solutions de (E) sont les racines cubiques des solutions de $1+X+X^2 = 0$, voir les nombres complexes satisfaisant $z^3 = X_1$ ou $z^3 = X_2$.

L'ensemble des solutions est donc

$$\{e^{\frac{2i\pi}{9}}, e^{\frac{8i\pi}{9}}, e^{\frac{14i\pi}{9}} e^{\frac{4i\pi}{9}}, e^{\frac{10i\pi}{9}}, e^{\frac{16i\pi}{9}}\}$$

EXERCICE 6

Donner l'ation cartenne de l'ensemble des points dont l'affixe est solution de

$$\frac{|iz - (1+i)|}{|z - 3i|} = 2$$

Quelle type de figure obtient-on ?

En posant $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, l'ation devient :

$$\frac{|ix - y - (1+i)|}{|x + iy - 3i|} = 2$$

qu'on peut rrire comme :

$$\frac{\sqrt{(-y-1)^2 + (x-1)^2}}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} = 2.$$

En prenant les carrt en multipliant les deux côtar le dminateur on arrive à l'équation (valable pour $z \neq 3i$) :

$$(y^2 + 2y + 1) + (x^2 - 2x + 1) = 4x^2 + 4(y^2 - 6y + 9)$$

qu'on peut simplifier comme suit :

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{26}{3}y = -\frac{34}{3}.$$

Il s'agit de l'ation d'un cercle, celui de centre $(-\frac{1}{3}, \frac{13}{3})$ et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{17}$.