Aix-Marseille Université 2015-2016

Géométrie et arithmétique 1

PARTIEL 1 - CORRIGÉ

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire et soient $u, v \in E$ deux vecteurs.

1. **(1,5 pts)** Rappeler les définitions de la colinéarité et de l'orthogonalité de u et v.
2. **(2 pts)** Montrer que si u et v sont non nuls et orthogonaux alors ils ne sont pas colinéaires.
3. **(1,5 pts)** Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution : 1. On dit que deux vecteurs $u, v \in E$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$. On dit que deux vecteurs $u, v \in E$ sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$.
2. Nous allons raisonner par absurde. Supposons que $u, v \in E$ soient deux vecteurs non nuls, colinéaires et orthogonaux. Comme u et v sont colinéaires et $v \neq \vec{0}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$. Comme ils sont orthogonaux, nous avons

$$0 = \langle u, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2.$$

Mais la condition $v \neq \vec{0}$ implique $\|v\| \neq 0$ et la condition $u \neq \vec{0}$ implique $\lambda \neq 0$. Nous avons trouvé la contradiction cherchée.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que pour tout $u, v \in E$ nous avons

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si u et v sont colinéaires.

⋆

Exercice 2 Nous rappelons que *médiatrice* d'un segment est la droite orthogonale à ce segment et passant par son milieu.
Soient $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ trois points du plan.

1. **(1 pt)** Donner une équation paramétrique de la médiatrice m_{AB} du segment $[AB]$.
2. **(1,5 pts)** Soit $D \in m_{AB}$. Montrer que $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$.
3. **(1 pt)** Donner une équation cartésienne de la médiatrice m_{AC} du segment $[AC]$.
4. **(1 pt)** Trouver le point M d'intersection des médiatrices m_{AB} et m_{AC}.
5. **(1,5 pts)** Montrer que $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CM}\|$.

Solution : 1. La médiatrice m_{AB} passe par le milieu P du segment $[AB]$. Si on considère les points de $\mathbb{R}^2$ comme des vecteurs, on peut écrire :

$$P = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0-2\\-1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur u de la médiatrice m_{AB} est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, par exmeple $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Nous obtenons l'équation paramétrique suivante :

$$m_{AB} \ : \ \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

2. Soit $D \in m_{AB}$. D'après la question précédente, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $D = \begin{pmatrix} 1+4t \\ 1-2t \end{pmatrix}$. Nous avons

$$\|\overrightarrow{AD}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1+4t \\ -2-2t \end{pmatrix} \right\|^2 = (-1+4t)^2 + (-2-2t)^2 = 5 + 20t^2,$$

$$\|\overrightarrow{BD}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1+4t \\ 2-2t \end{pmatrix} \right\|^2 = (1+4t)^2 + (2-2t)^2 = 5 + 20t^2.$$

Nous avons bien $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$.

3. Soit Q le milieu du segment $[AC]$:

$$Q = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la médiatrice m_{AC}. Comme elle passe par le point Q, nous obtenons l'équation cartésienne suivante :

$$2(x-3) - 2(y-2) = 0,$$

ou après la simplification :

$$m_{AC} \ : \ x - y - 1 = 0. \tag{2}$$

4. Soit $M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ le point d'intersection des droites m_{AB} et m_{AC}. Comme $M \in m_{AB}$, l'équation (1) implique que $x_0 = 1 + 4t_0$ et $y_0 = 1 - 2t_0$ pour une certaine valeur $t_0 \in \mathbb{R}$ du paramètre. Comme $M \in m_{AC}$, l'équation (2) implique que $x_0 - y_0 - 1 = 0$. On obtient

$$1 + 4t_0 - (1 - 2t_0) - 1 = 0, \ \text{ d'où } \ t_0 = \frac{1}{6}.$$

Nous obtenons donc

$$x_0 = 1 + 4t_0 = \frac{5}{3} \ \text{ et } \ y_0 = 1 - 2t_0 = \frac{2}{3}.$$

Le point cherché est $M \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

5. De la question précédente, nous savons que M vérifie l'équation paramétrique (1) avec $t = 1/6$. Grâce à la question 2. nous avons

$$\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 = 5 + 20(t_0)^2 = 5 + 20\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

De plus

$$\|\overrightarrow{CM}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 5/3 - 4 \\ 2/3 - 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

Nous avons donc $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{CM}\|$.

$\star$

Exercice 3 Soient $A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ quatre points de l'espace.

1. **(0,5 pt)** Vérifier que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
2. **(1,5 pts)** Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par ces trois points ; puis une équation cartésienne.
3. **(1 pt)** Donner une équation paramétrique de la droite passant par le point D et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
4. **(1 pt)** Donner la distance du point D au plan $\mathcal{P}$.

Solution : 1. Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires d'où les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. Les points A, B, C n'étant pas alignés, ils définissent un plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^3$. Ce plan passe par le point A et admet $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme vecteurs directeurs. On obtient l'équation paramétrique suivante :

$$\mathcal{P} \ : \ \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 0 - s + t \qquad s, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + s + 2t \end{cases}$$

Pour donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$, nous calculons un vecteur normal à ce plan :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Utilisant ce vecteur normal et le fait que $\mathcal{P}$ passe par le point A, nous obtenons l'équation

$$-3(x+1) + 3y + 3(z-1) = 0$$

ce qui donne après simplification

$$\mathcal{P} \ : \ -x + y + z - 2 = 0.$$

3. Le vecteur $\vec{n}$ trouvé à la question précédente est un vecteur directeur de la droite cherchée. Comme elle passe par le point D, on obtient l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

4. La distance d'un point $M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ par rapport à un plan π d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ s'exprime par la formule

$$dist(M, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Nous obtenons

$$dist(D, \mathcal{P}) = \frac{|-1-2+0-2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$\star$

Exercice 4 Considérons les points $A\begin{pmatrix}10\\1\\5\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}10\\0\\2\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. **(1,5 pts)** Trouver une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite (AB) et qui est parallèle à l'un des plans d'équation $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$.
2. **(1 pt)** Donner une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}'$ dont un vecteur générateur est orthogonal au plan $\mathcal{P}$ et qui contient la droite (AB).
3. **(1 pt)** Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$.
4. **(1,5 pts)** Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (AB).

Solution : 1. Un plan parallèle au plan d'équation $x = 0$ admet pour équation cartésienne $x - a = 0$. De même, un plan parallèle à l'un des plans $y = 0$ ou $z = 0$ admet pour équation cartésienne $y - b = 0$ ou $z - c = 0$. On cherche un tel plan contenant les points A et B. On trouve

$$\mathcal{P} \ : \ x - 10 = 0.$$

2. Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}'$ admet $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix}$ comme vecteurs directeurs. De plus, il passe par le point A. Nous obtenons l'équation paramétrique suivante

$$\mathcal{P}' \ : \ \begin{cases} x = 10 + s \\ y = 1 - t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

3. Calculons un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$:

$$\vec{m} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

Le plan $\mathcal{P}'$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{m}$. Nous obtenons l'équation cartésienne :

$$-3(y-1) + (z-5) = 0 \ \text{ ou après simplification } \ 3y - z + 2 = 0.$$

4. La droite (AB) est contenue dans les plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, d'où l'équation cartésienne

$$(AB) \ : \ \begin{cases} x - 10 = 0 \\ 3y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

La droite (AB) est aussi la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ d'où l'équation paramétrique

$$(AB) \ : \ \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$