Aix-Marseille Université 2014-2015

Géométrie et arithmétique 1

PARTIEL 1 - 10 OCTOBRE 2014

Exercice 1 [Question de Cours] (Sur 4 points)

1) (1pt) Énoncez la définition du produit scalaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ puis de la norme d'un vecteur.

Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel défini par : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

La norme de $\vec{u}$ est définie par : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2) Compléter les égalités ou inégalités suivantes, où $\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v}$ et $\vec{v'}$ désignent des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et λ, λ', μ et μ' des réels :

a) (1pt) $(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}).(\lambda'\vec{u'} + \mu'\vec{v'}) = \lambda\lambda'\vec{u}.\vec{u'} + \lambda\mu'\vec{u}.\vec{v'} + \mu\lambda'\vec{v}.\vec{u'} + \mu\mu'\vec{v}.\vec{v'}$

b) (1pt) $||\lambda\vec{u}|| = |\lambda|\ ||\vec{u}||$

c) (1pt) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$

Exercice 2 (Sur 5 points)

1) (2pts) Donner une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, -2)$.

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u},$$

d'où le système d'équations paramétriques : $x(t) = 1 + t,\ y(t) = 3 - 2t$.

En éliminant t entre les deux équations, on obtient une équation cartésienne de $\mathcal{D}$: $2x + y = 5$.

2) (1pt) Écrire une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par le point $B(0, -1)$.

$\mathcal{D}'$ admet $\vec{u}$ pour vecteur orthogonal, donc

$$M(x, y) \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{u} = 0,$$

qui donne l'équation cartésienne : $x - 2(y + 1) = 0$, c'est-à-dire $x - 2y - 2 = 0$.

3) (1pt) Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Le point M appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si et seulement si les coordonnées (x, y) de M sont solutions du système

$$2x + y = 5, \quad x - 2y = 2.$$

Ce système admet $(x, y) = (\frac{12}{5}, \frac{1}{5},)$ pour unique solution.

4) (1pt) Calculer la distance de B à la droite $\mathcal{D}$.

Notons P le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, déterminé à le question 3). La distance de B à la droite $\mathcal{D}$ est égale à

$$||\overrightarrow{BP}|| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Exercice 3 (Sur 4 points)

Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'une droite ou d'un plan. S'il s'agit d'une droite, en donner deux points distincts, s'il s'agit d'un plan, en donner 3 points distincts non alignés.

1) (1pt) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'équations paramétriques $x(t) = -5t + 1$ et $y(t) = 2t + 3$

C'est une droite ! On obtient deux points en choisissant deux valeurs distinctes du paramètre t*, par exemple* $t = 0$ *et* $t = 1$ *:* $M_0(1, 3)$ *et* $M_1(-4, 5)$.

2) (1pt) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x + 3y + z + 5 = 0$

C'est un plan ! On obtient trois points non alignés en fixant deux coordonnées nulles et en calculant la troisième à partir de l'équation : $(0, 0, -5)$, $(0, -\frac{5}{3}, 0)$ *et* $(-\frac{5}{2}, 0, 0)$.

3) (1pt) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques $x(t) = -5t + 1,\ y(t) = 2t + 3$ et $z(t) = -t + 2$

Il y a un seul paramètre, donc c'est une droite ! On obtient deux points en faisant varier t *:* $M_0(1, 3, 2)$ *et* $M_\pi(-5\pi + 1, 2\pi + 3, -\pi + 2)$. ;-)

4) (1pt) Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes $2x + y + 2z - 2 = 0$ et $x = 0$.

C'est l'intersection de deux plans non de vecteurs orthogonaux $(2, 1, 2)$ *et* $(1, 0, 0)$ *non colinéaires. Donc c'est une droite ! On obtient trois points en fixant* $x = 0$*, la valeur de* z *et en calculant* y *à l'aide de la première équation :*

$z = 0$*, donne le point* $(0, 2, 0)$ *;*

$z = 1$*, donne le point* $(0, 0, 1)$ *;*

$z = 2015$ *(c'est pour bientôt ! !), donne le point* $(0, -4028, 2015)$ *;*

Exercice 4 (Sur 4 points)

Pour tout réel m, on considère le plan P_m de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne :

$$m^2x + (2m - 1)y + mz = 3$$

1) (2pts) Pour quelles valeurs du paramètre m le point $A(1, 1, 1)$ appartient-il à P_m ?

$A \in P_m \Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 + m = 3 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$*, qui donne deux solutions :* $m = -4$ *et* $m = 1$.

2) (2pts) Pour quelle valeur de m le vecteur $\vec{n} = (2, -\frac{5}{2}, -1)$ est-il normal (c'est-à-dire orthogonal) à P_m ?

Un vecteur orthogonal à P_m *est* $\vec{u} = (m^2, 2m-1, m)$*. Donc* $\vec{n} = (2, -\frac{5}{2}, -1)$ *est orthogonal à* P_m *si et seulement si* $\vec{u}$ *et* $\vec{n}$ *sont colinéaires. Le déterminant des coordonnées* y *et* z *doit être nul, ce qui donne :* $m = -2$*, et donc* $\vec{u} = (4, -5, -2)$*. Ce vecteur* $\vec{u} = (4, -5, -2)$ *est égal à* $2\vec{n}$*, donc est bien colinéaire à* $\vec{n}$.

Conclusion : $m = -2$ *est l'unique valeur de* m *pour laquelle* $\vec{n} = (2, -\frac{5}{2}, -1)$ *est orthogonal* P_m.

Exercice 5 (Sur 4 points)

Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$ soit égal à zéro.

1) (2pts) Soit I le milieu du segment $[A, B]$. Démontrer qu'un point M appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB}$$

On utilise la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}.(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IM} = 0.$

Or $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ *puisque* I *est le milieu de* $[AB]$*. D'où le résultat.*

2) (1pt) En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$*. Donc de 1), on obtient :* $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow ||\overrightarrow{IM}|| = ||\overrightarrow{AI}||$*. D'où* $\mathcal{C}$ *est le cercle de centre* I *et de rayon* $|AI|$.

3) (1pt) Faire une figure. *Plus la place ! ! !* ;-))) Juste assez pour vous souhaiter une bonne correction....