Université d'Aix-Marseille — Licences d'Informatique et de Mathématiques
Semestre 1 — 2016-2017

Géométrie et arithmétique 1

Devoir surveillé du 14 octobre 2016

Calculette et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Questions de cours

1. Compléter les égalités suivantes pour des vecteurs u, v, w et un scalaire λ (*linéarité à gauche*) :
$$(u+v)\cdot w = ? \qquad\qquad (\lambda\, u)\cdot v = ?$$
2. Énoncer l'*inégalité triangulaire* et l'*inégalité de Cauchy–Schwarz*.
3. En élevant au carré chaque membre de la première inégalité, monter que celle-ci se déduit de la seconde.
4. Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur non nul, donner un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^2$ qui lui soit *orthogonal*.
5. Que peut–on dire des vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$ si le vecteur $u \wedge v$ est nul ?

Exercice 1

On suppose que les points A, B, C, D forment un *parallèlogramme* dans $\mathbb{R}^3$, et on fixe les coordonnées :
$$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer les vecteurs $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{BC}$, ainsi que les coordonnées du point D.
2. Calculer $u \cdot v$, $\|u\|$, $\|v\|$, et en déduire l'*angle* (non orienté) α entre les vecteurs u et v.
3. Donner une *base* du plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B, C et un *système paramétrique* qui définit $\mathcal{P}$.
4. Donner un vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^3$ qui soit *orthogonal* (on dit aussi *normal*) au plan $\mathcal{P}$.
5. Calculer l'*aire* du parallèlogramme $ABCD$.

Exercice 2

Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il s'agit :
- d'une *droite*, auquel cas on en donnera un *système paramétrique**, un *point* A et un *vecteur directeur* u ;
- d'un *plan*, auquel cas on en donnera un *système paramétrique**, un *point* A et une *base* (u, v) ;
- d'un *point*, auquel cas on précisera lequel ;
- de l'*ensemble vide*, auquel cas on expliquera pourquoi.

* sauf, bien sûr, pour les questions 1 et 2.

1. le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par le *système paramétrique* $\begin{cases} x = 3t+7, \\ y = 2t-1, \end{cases} (t \in \mathbb{R})$;
2. le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le *système paramétrique* $\begin{cases} x = s+t, \\ y = s-t-1, \\ z = s+2, \end{cases} (s, t \in \mathbb{R})$;
3. le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par l'*équation cartésienne* $x + 2y + 1 = 0$;
4. le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par l'*équation cartésienne* $x - y + z + 1 = 0$;
5. le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par le *système d'équations cartésiennes* $\begin{cases} 5x - 10y - 3 = 0, \\ y - \frac{1}{2}x - 7 = 0 ; \end{cases}$
6. le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le *système d'équations cartésiennes* $\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ 2y - x = 0. \end{cases}$