Année universitaire 2016-2017

Site: ⊠Luminy ⊠St-Charles □St-Jérôme □Cht-Gombert ⊠Aix-Montperrin □Aubagne-Satis
Sujet session: ⊠1er semestre - □2ème semestre - □Session 2 Durée de l'épreuve: 2h
Examen de: ⊠L1 / □L2 / □L3 - □M1 / □M2 - □LP - □DU Nom diplôme: Licence IM
Code Apogée du module: SMI1U3T Libellé du module: Géométrie et arithmétique 1
Documents autorisés: □OUI - ⊠NON Calculatrices autorisées: □OUI - ⊠NON

Questions de cours. Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que le degré de PQ est la somme des degrés de P et Q. On se limitera au cas $P, Q \neq 0$.

   Soient $n \geq 0$ et $m \geq 0$ les degrés de P et Q respectivement. Posons $P = \sum_{i\geq 0} a_i X^i$, $Q = \sum_{j\geq 0} b_j X^j$ et $PQ = \sum_{k\geq 0} c_k X^k$, où $a_n \neq 0$, $a_i = 0$ si $i > n$, $b_m \neq 0$, $b_j = 0$ si $j > m$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. On remarque que si $k = i + j > n+m$ on doit avoir $i > m$ ou $j > m$ et donc $a_i = 0$ ou $b_j = 0$. Dans tous les cas, chaque terme de la somme $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ est nul ce qui montre $c_k = 0$ pour $k > n+m$ et $\deg(PQ) \leq m+n$. Le même raisonnement montre que dans la somme $\sum_{i+j=n+m} a_i b_j$ le seul terme non nul est $a_n b_m$, donc $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$ par hypothèse et $\deg(PQ) = m + n$.

2. Donner la définition de polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$. Dire quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

   Un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ *s'il n'est pas inversible (à savoir si et seulement s'il n'est pas constant, ou encore si et seulement si son degré est positif) et pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$ l'un parmi A et B a degré 0.*

   Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré 1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux de degré 1 et ceux de degré 2 ayant discriminant négatif.

3. Rappeler la définition de racine n-ième d'un nombre complexe w.

   Soit $n \geq 1$ un entier et soit $w \in \mathbb{C}$. On appelle racine n-ième de w *tout nombre complexe z tel que $z^n = w$.*

Exercice 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3 + (-1+6i)X^2 - (13+4i)X - 11 - 10i$.

1. Effectuer la division de P par $(X + 1)$.

   On a $P = (X+1)(X^2 + (-2+6i)X - (11+10i))$.

2. Trouver les racines carrées de $3 + 4i$. En déduire les racines carrées de $12 + 16i$.

   Les racines carrées $z = x + iy$ de $3 + 4i$ doivent satisfaire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ 2xy &= 4 \end{cases}$$

   ce qui donne $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$. En tenant compte du fait que x et y ont le même signe, on en déduit les racines carrées de $3 + 4i$: $\pm(2 + i)$. Puisque $12 + 16i = 2^2(3 + 4i)$, les racines carrés de $12 + 16i$ sont $\pm 2(2 + i) = \pm(4 + 2i)$.

3. Trouver les racines de P.

   Les racines de P sont l'union de celle de $X+1$, à savoir -1, et celles de $Q = X^2 + (-2+6i)X - 1$. Pour trouver les deux racines de Q calculons d'abord son discriminant : $\Delta = (-2+6i)^2 + 4(11+10i) = 12+16i$. D'après le point précédent, les racines carrées de Δ sont $\pm(4+2i)$. Les racines de Q sont alors $[(2-6i)+(4+2i)]/2 = 3-2i$ et $[(2-6i)-(4+2i)]/2 = -1-4i$.

Exercice 2.

1. Déterminer l'écriture algébrique des racines sixièmes de l'unité.

   Les racines sixièmes de l'unité sont : $e^{0i} = 1$, $e^{2i\pi/6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{4i\pi/6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{6i\pi/6} = -1$, $e^{8i\pi/6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $e^{10i\pi/6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. Décomposer $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

   En utilisant le fait que les racines complexes de X^6-1 sont les racines sixièmes de l'unité, on obtient la décomposition de X^6-1 en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

   $$X^6 - 1 = (X-1)(X - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(X+1)(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(X - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

   En multipliant ensemble les facteurs correspondant aux racines conjuguées, on obtient la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

   $$X^6 - 1 = (X-1)(X^2 - X + 1)(X+1)(X^2 + X + 1).$$

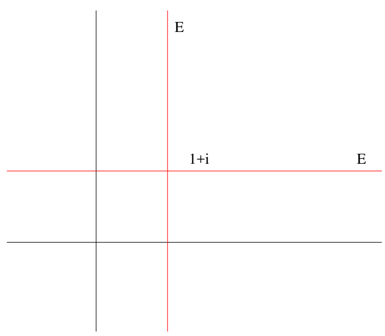
Exercice 3. On considère la rotation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = iz + 2$.

1. Déterminer son centre, angle de rotation et facteur de dilatation.

   Le centre est le point du plan d'affixe z satisfaisant $z = f(z) = iz + 2$. L'affixe du centre est donc $z = \frac{2}{1-i} = 1+i$. L'angle de la rotation est $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit E l'ensemble défini par la condition $\mathrm{Im}((z-(1+i))^2) = 0$. Décrire E et le représenter graphiquement dans le plan complexe.

   En posant $z = x+iy$ et en développant le carré on a $(z-(1+i))^2 = [(x-1)+i(y-1)]2 = [(x-1)^2 - (y-1)^2] + 2i(x-1)(y-1)$. Sa partie imaginaire est nulle si et seulement si $x = 1$ ou $y = 1$. L'ensemble E est donc constitué de l'union de la droite horizontale et de la droite verticale passant par le point d'affixe $1+i$, centre de la rotation.

3. Déterminer l'image $f(E)$ de l'ensemble E par la similitude f.

   Puisque l'image d'une droite par une rotation (et plus généralement par une similitude) est encore une droite, en tenant compte du fait que $1+i$ est le point fixe de la rotation et que le vecteur directeur d'une droite est tourné d'un angle de $\frac{\pi}{2}$, $f(E) = E$ et f échange les deux droites.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - y = 0$ et $x + y + z - 1 = 0$ respectivement.

1. Leur intersection est une droite $\mathcal{D}_1$ dont on donnera une équation paramétrique et un vecteur directeur.

   La droite est formée par les points satisfaisant le système cartésien

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

   En prenant par exemple x comme paramètre on obtient l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   d'où on déduit un vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$ orthogonal à $\mathcal{D}_1$ et passant par $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_1$.

   L'équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$ est de la forme $ax+y+cz+d = 0$ où le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul et orthogonal au plan, qu'ici on peut choisir être égal à u : $x+y-2z+d = 0$. Le point A satisfait cette équation si et seulemnt si $d = 2$. L'équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$ est donc $x + y - 2z + 2 = 0$.

3. Déterminer un point B de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3$ et un point C de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ tels que $A \neq B, C$.

   Le point B doit satisfaire le système

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

   et on peut prendre $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *De même le point C doit satisfaire le système*

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

   et on peut prendre $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer le cosinus de l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (sa valeur absolue est le cosinus de l'angle θ entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, avec $0 < \theta \leq \pi/2$).

   On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Les cosinus est donné par* $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1\times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^+(-1)^2+0^2}} = 0$. *Les plans sont donc perpendiculaires (leurs vecteurs normaux sont, par ailleurs, orthogonaux).*