Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2014-2015

Géométrie et arithmétique 1

Examen de janvier 2015

Calculette et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Exercice 1 7 Points

1. Donner la définition du PGCD de deux polynômes A et B dans $\mathbb{K}[X]$ et la caractérisation de Bézout de deux polynômes premiers entre eux. 0,5+0,5 Points

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$.
Donner l'expression exponentielle et algébrique des solutions. 1 Point

$z^3 = (re^{i\theta})^3 = 8i = 8e^{i\pi/2} \implies r = 2$ *et* $\theta = \pi/6, 5\pi/6$ *ou* $3\pi/2$.
Donc $z \in \{2e^{i\pi/6}, 2e^{5i\pi/6}, 2e^{3i\pi/2}\} = \{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i\}$.

3. Soient $P_1(X) = X^3 - 8i$ et $P_2(X) = X^3 + 8i$.
Montrer que $-z$ est racine de P_2 si et seulement si z est racine de P_1. 1 Point

Si $P_1(z) = 0$ *alors* $z^3 - 8i = 0 \iff z^3 = 8i$. *Mais* $(-z)^3 = -z^3$ *donc :*
$P_1(z) = 0 \iff z^3 = 8i \iff (-z)^3 = -8i \iff (-z)^3 + 8i = 0 \iff P_2(-z) = 0$.

4. En déduire les racines du polynôme $P(X) = X^6 + 64$. 1 Point

On pose $Z = X^3$. $P(X) = 0 \iff Z^2 + 64 = 0 \iff Z^2 = -64 \iff Z = \pm 8i$. *Donc les racines de* $P(X)$ *sont les racines de* $P_1(X)$ *et les racines de* $P_2(X)$, *donc l'ensemble des racines est :*
$\{2e^{i\pi/6}, 2e^{5i\pi/6}, 2e^{3i\pi/2}, 2e^{7i\pi/6}, 2e^{11i\pi/6}, 2e^{i\pi/2}\} = \{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i, 2i\}$.

5. En déduire la décomposition en éléments irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. 1+1 Points

Dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X-\sqrt{3}-i)(X-\sqrt{3}+i)(X+\sqrt{3}-i)(X+\sqrt{3}+i)(X+2i)(X-2i)$
Dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4)(X^2 + 4)$

Exercice 2 5 Points

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 2$ par $B(X) = X^2 + 2X + 1$. 1 Point

$A(X) = B(X)(X^2 - 3X + 1) + X + 1$

2. Donner le PGCD unitaire (coefficient de plus haut degré égal à un) P de $A(X)$ et $B(X)$. 1 Point

$PGCD = X + 1$

3. Trouver un couple (U, V) de polynômes tel que $UA + VB = P$ (1). 1,5 Point

$U(X) = 1, \; V(X) = -(X^2 - 3X + 1)$

4. Donner tous les couples (U, V) de polynômes satisfaisant (1).

$A - (X^2 - 3X + 1)B = X + 1$ *et* $UA + VB = (X + 1)$ *alors, on a*
$A(U - 1) + B(V + (X^2 - 3X + 1) = 0$ *comme* $B = (X + 1)^2$, *et* $A = (X + 1)(X^3 - 2X^2 - 2X + 2)$ *on a* $(U - 1)(X^3 - 2X^2 - 2X + 2) + (X + 1)(V + (X^2 - 3X + 1) = 0$ *avec* $X + 1$ *et* $X^3 - 2X^2 - 2X + 2$ *premiers entre eux.*
Donc il existe un polynôme $P(X)$ *t.q.* $U - 1 = (X+1)P(X)$ *et* $V + X^2 - 3X + 1 = -P(X)(X^3 - 2X^2 - 2X + 2)$ *et les couples* (U, V) *sont* $U(X) = 1 + P(X)(X+1)$ *et* $V(X) = -(X^2 - 3X + 1) - P(X)(X^3 - 2X^2 - 2X + 2)$ *pour tout polynôme* $P(X)$.

Exercice 3 2 Points
On se place dans le plan orthonormé $\mathbb{R}^2$.

Soient $A(1;2)$ un point du plan et (D) la droite d'équation cartésienne $(D)\ : x+y+1=0$.

Donner les équations cartésienne et paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire à (D).

La perpendiculaire est $x-y+1=0$ *ou* $x(t)=1+t,\ y(t)=2+t$.

Exercice 4 4 Points
Soient $A(1;2;1), B(3;-2;5)$ et I le milieu du segment $[AB]$.
1. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par I et perpendiculaire au segment $[AB]$. 1 Point
Le point I *est* $(2;0;3)$ *et le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est* $(2,-4,4)$ *; le plan* P *a équation* $2x-4y+4z-16=0$ *ou* $x-2y+2z-8=0$.
2. Soit (D) la droite d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x=x(t)= & t\\ y=y(t)= & t-2\\ z=z(t)= & 2t+2\end{cases}$$

Le point I appartient-il à la droite (D) ? La droite (D) est-elle dans le plan (P) ? 0,5 + 0,5 Points
Puisque $(t,t-2,2t+2)=(2,0,3)$ *n'a pas de solution,* $I\notin(D)$ *et* $(1,1,2).(2,-4,4)\neq 0$ *donc* (D) *n'est pas perpendiculaire à* $\overrightarrow{AB}$.
3. Donner les coordonnées du point C d'intersection du plan (P) et de la droite (D). 1 Point
En resolvant $t-2(t-2,)+2(2t+2)-8=0$ *on trouve* $t=0$ *et* $C=(0,-2,2)$
4. Calculer l'aire du triangle (ABC) (penser à la moitié d'un parallélogramme). 1 Point
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(2,-4,4)\wedge(-1,-4,1)=(12,-6,-12)$ *et* $||(12,-6,-12)||=\sqrt{326}=18.$

Donc l'aire du parallélogramme est 18, l'aire du triangle est 9.

Exercice 5 4,5 Points
Soit T l'application du plan qui envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe $f(z)=(1+i)z+1$. On note A le point d'affixe $z_A=1-i$ et A' l'image de A par T.
1. Déterminer l'affixe de A'. 0,5 Points
$f(1-i)=3.$
2. Résoudre l'équation $f(z)=z$. En déduire que T a un unique point fixe, noté F. 0,5 Points
$f(z)=z\iff z=\frac{-1}{i}=i.$
3. Montrer que le cercle de centre C et de rayon R est l'ensemble des points d'affixes dans $\{c+Re^{it}|t\in\mathbb{R}\}$, où c est l'affixe de C. 1 Point
Le cercle est l'ensemble des points à distance R *du point* c*, donc* $\{z\mid |z-c|=R\}$*. Ecrivant* $z=c+re^{i\theta}$ *on a* $\{z\mid z=c+re^{i\theta}, |z-c|=r=R\}$.
4. Déterminer l'image par T du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$. 1 Point
$f(1-i+\sqrt{2}e^{i\theta})=3+(1+i)\sqrt{2}e^{i\theta}=3+2e^{\pi/4}e^{i\theta}$ *et l'image du cercle est un cercle de rayon 2 et centre 3.*
5. Calculer $\frac{FM'}{FM}$ et l'angle $(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FM'})$. En déduire la nature de T. 1,5 Points
$\frac{FM'}{FM}=\frac{|f(z)-i|}{|z-i|}=\frac{|(1+i)z+1-i|}{|z-i|}=|1+i|=\sqrt{2}.$
L'angle $(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FM'})$ *est argument de* $f(z)-i$ *moins argument de* $z-i$*, qui est argument de* $\frac{f(z)-i}{z-i}$ *qui est* $arg(1+i)=\pi/4$.

T est une rotation de centre i, d'angle $\pi/4$, suivi d'une dilatation de facteur $\sqrt{2}$.