Aix-Marseille Université 2016-2017

Géométrie et Arithmétique

DEVOIR MAISON 3 (7/11/2016)

Exercice 1 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad z_2 = \pi e^{-i\frac{5\pi}{6}+1}, \qquad z_3 = \frac{(1-\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+\sqrt{3})e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{5\pi}{4}}}, \qquad z_4 = \frac{1}{1+e^{i2\theta}}$$

Exercice 2

1. Mettre sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :
$$z_1 = 3+3i, \qquad z_2 = -\frac{4}{3}i, \qquad z_3 = \sqrt{3}, \qquad z_4 = \frac{4i}{\sqrt{3}+i}, \qquad z_5 = (i+\sqrt{3})\pi i.$$
2. Donner la forme exponentielle et algébrique du nombre complexe $\frac{z_1^3 z_4^2}{z_5}$.

Exercice 3

1. Donner la forme exponentielle et algébrique des nombres complexes suivant :
$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{2016}, \qquad (1+i)^{2017}.$$
2. Soient $p, q, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $2q$ divise $pn - a$ (c'est à dire $pn \equiv a \mod 2q$), avec $a \in \mathbb{Z}$, alors
$$\left(e^{i\frac{p}{q}\pi}\right)^n = e^{i\frac{a}{q}\pi}.$$
Montrer que l'on peut choisir $a \in \{0, 1, \ldots, 2q-1\}$.
3. Pour quelles valeurs de θ le nombre complexe $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$? Pour quelles valeurs de θ le nombre complexe $e^{i\theta} \in i\mathbb{R}$?
4. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles le nombre $(\sqrt{3}+1)^n$ est réel ? Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ il est imaginaire pure ?

Exercice 4 Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\tan(\alpha) - i}{\tan(\alpha) + i}, \qquad z_2 = \frac{1}{1 + i\tan(\alpha)}$$

Exercice 5 Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$