Géométrie et Arithmétique

Contrôle continu 2
27/09/2016

Questions du cours

1) Donner la définition algébrique de produit scalaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Définir ensuite la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. *Soient* $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *On définit le* produit scalaire *de* u *et* v *par*

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'.$$

La norme *de* u *est définie par :*

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2) Donner la définition de vecteurs orthogonaux.

Corrigé. *Deux vecteurs* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*) sont* orthogonaux *si* $u \cdot v = 0$.

3) Montrer que deux vecteurs u, v sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (*Théorème de Pythagore*).

Corrigé. *On a*

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \cdot (u+v) = \\ &= u \cdot (u+v) + v \cdot (u+v) = \\ &= u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v = \\ &= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ *si et seulement si* $u \cdot v = 0$, *c'est à dire si et seulement si* u *et* v *sont orthogonaux.*

Exercice (Toutes les réponses doivent être justifiées)

4) Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $u \cdot v$, $\|u\|$ et $\|v\|$. Déterminer ensuite l'angle (non orienté) $\theta \in [0, \pi]$ entre u et v.

Corrigé. *On a :*

* $u \cdot v = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -5$;
* $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{5}$;
* $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{10}$.

On obtient

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

5) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants sont orthogonaux :

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ k \\ k \end{pmatrix} \quad \text{et } v = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé. *On a*

$$u \cdot v = -2 + k^2 + k.$$

Les valeurs réelles de k pour lesquelles u et v sont orthogonaux sont les solutions réelles de l'équation de second degré

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

c'est à dire $k = -2$ ou $k = 1$.