

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 * Parmi les ensembles suivants, reconnaître les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}; & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - y = 0\}; & C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}; \\ D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}; & E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 4z = 0\}; \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 3z = 0\}; & G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\}; \\ H &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}; & K &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1\}. \end{aligned}$$

Exercice 2 * Les ensembles suivants, sont-ils des sous-espaces vectoriels des espaces ambiants, munis des lois usuelles ?

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0, y = z\}; & E_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}; \\ E_3 &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}; & E_4 &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}; \\ E_5 &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P = 0 \text{ ou } P' = 3\}; & E_6 &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est croissante}\}; \\ E_7 &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est surjective}\} \cup \{f = 0\}; & E_8 &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(\mathbb{R}) \text{ est un ensemble fini}\}; \\ E_9 &= \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \in f(\mathbb{R})\}; & E_{10} &= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid 2f(a) = f(b)\}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Considérons deux sous ensembles de $M_2(\mathbb{R})$ suivants :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c \\ 2c & -b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sont-ils des sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4 * Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Est-ce que $V \cap W$ et $V \cup W$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n ?

2 Familles libres

Bien que la notation standard soit en colonnes, nous allons donner les vecteurs de \mathbb{R}^n en lignes pour gagner de place sur la planche.

Exercice 5 * Est-ce que les vecteurs suivants forment une famille libre dans l'espace \mathbb{R}^n correspondant ?

1. $(2, 1), (6, 3) \in \mathbb{R}^2$; 2. $(7, 11), (11, 7) \in \mathbb{R}^2$; 3. $(1, 1), (3, -5), (-6, 5) \in \mathbb{R}^2$;
4. $(1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$; 5. $(1, 1, 1), (3, 2, 1), (6, 5, 4) \in \mathbb{R}^3$; 6. $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 3, 6) \in \mathbb{R}^3$;
7. $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 7, 10) \in \mathbb{R}^4$; 8. $(1, 2, 1, 2, 1), (2, 1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^5$.

Exercice 6 * Considérons $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ avec $u_1 = 0$. Est-ce que ces vecteurs forment une famille libre ?

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel réel. Démontrer que :

1. Deux vecteurs $u, w \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.
2. Les vecteurs non nuls $u_1, \dots, u_n \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si $u_{i+1} \notin \text{Vect}\{u_1, \dots, u_i\}$, pour tout $i = 1, \dots, n - 1$.

Exercice 8 * Soient dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3 , puis avec v_2 et v_3 .
2. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 9 Soit E l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées.

1. $\{2, 4 \sin^2 x, \cos^2 x\}$, 2. $\{x, e^x\}$, 3. $\{\sin x, \cos x\}$, 4. $\{(1+x)^2, x^2 + 2x, 3, x\}$, 5. $\{0, x, x^2\}$,
6. $\{\cos(2x), \sin^2 x, \cos^2 x\}$, 7. $\{1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}\}$, 8. $\{1, \sin x, \sin(2x), \dots, \sin(nx)\}$.

Exercice 10 * Soient $E = \text{Vect}\{(2, 3, -1), (1, -1, 2)\}$ et $F = \text{Vect}\{(3, 2, 1), (1, 4, -3)\}$ deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 . Montrer que $E = F$.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel réel. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

1. Une famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ dans E est libre si et seulement si la famille $\{\sum_{j=1}^i v_j : i = 1, \dots, n\}$ est libre.
2. Si $v_1, v_2, v_3, v_4 \in E$ et $\sum_{j=1}^4 v_j = 0$, alors $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.
3. Si $v, u, w \in E$ et $w \notin \text{Vect}\{v, u\}$, alors $\text{Vect}\{v, u\} \cap \text{Vect}\{v, w\} = \text{Vect}\{v\}$.

Exercice 12 Soient e_1, e_2, e_3 des vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel réel X . Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les vecteurs $e_1 + ae_2, e_2 + ae_3, e_1 + ae_3$ sont linéairement indépendants ?

Exercice 13 Soit E l'espace vectoriel réel des suites de nombres réels, muni des lois usuelles suivantes :

$$\forall (x_n), (y_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \quad \lambda \cdot (x_n) = (\lambda x_n).$$

Considérons le sous-ensemble $F \subset E$ des suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F .
3. Montrer que tout élément de F est déterminée par ses deux premiers termes. En déduire que

$$F = \text{Vect}\{(a_n), (b_n)\},$$

c'est-à-dire que F est un plan vectoriel de E .

4. Déterminer le terme général de la suite $(u_n) \in F$ vérifiant $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

3 Bases et dimension

Exercice 14 * Vérifier que la famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ engendre \mathbb{R}^3 tout entier. Est-ce une base de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 15 * Montrer que les vecteurs suivants :

$$v_1 = (0, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0, 1), v_4 = (1, 1, 1, 0),$$

forment une base de \mathbb{R}^4 . Dans cette base, calculer les coordonnées des vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 ainsi que celles de $u = (1, 1, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 0, 0)$.

Exercice 16 * Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , les vecteurs suivants constituent-ils une base ?

1. $x_1 = (1, -1, 0), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 2, 3)$.
2. $x_1 = (1, 0, -1), x_2 = (0, 1, 0), x_3 = (1, 1, 0)$.
3. $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (2, 3, 1), x_3 = (0, 0, 0)$.
4. $x_1 = (1, 0, 0), x_2 = (1, 1, 0), x_3 = (1, 1, 1)$.
5. $x_1 = (1, 1, -1), x_2 = (1, -1, 1), x_3 = (-1, 1, 1)$.

Exercice 17 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 . Le cas échéant calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}, \quad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\},$$
$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^x e^y = 0\}, \quad E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

Exercice 18 Donner une description géométrique de tous les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 puis de \mathbb{R}^3 (raisonner selon la dimension de ceux-ci).

Exercice 19 * Considérons l'ensemble

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base et en déduire sa dimension.

Exercice 20 Montrer que l'ensemble $S = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$. Trouver une base de S et en déduire sa dimension.

Exercice 21 Soit la famille de polynômes $(X^3, X^2(X-1), X(X-1)^2, (X-1)^3)$. Montrer qu'elle engendre $\mathbb{R}_3[X]$. Justifier que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Trouver les coordonnées du vecteur $P = 2X^3 + X + 2$ dans cette base.

Exercice 22 Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n . Montrer que P et ses n dérivées forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 23 *

1. Montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de l'espace des matrices carrées réelles d'ordre 2. En déduire la dimension de cet espace.

2. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n .
3. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n diagonales.
4. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n symétriques.
5. Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures.

Exercice 24 * Dans un espace vectoriel réel E de base (e_1, e_2, e_3) , les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

1. $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1\}$,
2. $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$,
3. $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_1\}$,
4. $\{e_1 + 2e_2, e_2 + 2e_3, e_3 + 2e_1\}$,
5. $\{e_1 + e_2, e_2 - 2e_3\}$,
6. $\{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + e_2 - e_3\}$.

4 Somme directe, sous-espaces supplémentaires

Exercice 25 * Montrer que $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z\}$ est un sous-espace de \mathbb{R}^3 dont on déterminera une base. Même question avec $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 0\}$. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Exercice 26 * Soient x, y, u, v des éléments de \mathbb{R}^4 . On note M et N les sous espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{x, y\}$ et $\{u, v\}$. Quels sont les cas où $M \oplus N = \mathbb{R}^4$?

1. $x = (1, 1, 0, 0), y = (1, 0, 1, 0), u = (0, 1, 0, 1), v = (0, 0, 1, 1)$.
2. $x = (-1, 1, 1, 0), y = (0, 1, -1, 1), u = (1, 0, 0, 0), v = (0, 0, 0, 1)$.
3. $x = (1, 0, 0, 1), y = (0, 1, 1, 0), u = (1, 0, 1, 0), v = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 27 On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 0, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1), v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 .

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
2. Même question pour $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$.

Exercice 28 Déterminer si les sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 suivants sont supplémentaires ou en somme directe :

1. $V_1 = \text{Vect}\{(1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$ et $V_2 = \text{Vect}\{(0, 1, 2)\}$.
2. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = \text{Vect}\{(1, 0, -1)\}$.
3. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ et $V_2 = \text{Vect}\{(1, 2, 1)\}$.
4. $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0, x - z = 0\}$ et $V_2 = \text{Vect}\{(1, a, b)\}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 29 * Soit F le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 1, 1), (1, 0, -1)$ et $(4, 2, 0)$. Quelle est la dimension de F ? Trouver un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^3 .