Aix-Marseille Université	2016-2017

Algèbre Linéaire 1

PARTIEL 2 - 24 MARS 2017

DURÉE : 2 HEURES. SANS DOCUMENTS NI CALCULATRICES

Un barème, à titre indicatif, est donné en marge.

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et m colonnes. Notons par $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des solutions du systeme linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, et par V_A l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A.

1. (a) Rappeler la raison pour laquelle $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ est un sous-espace vectoriel. Donner la dimension de l'espace vectoriel ambiant qui contient $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. **0,5 + 0,5 pt**
   (b) Quelle est la dimension de l'espace ambiant dans lequel V_A est naturellement contenu ? **0,5 pts**
   (c) Donner la formule reliant la dimension de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ au rang de A. **0,5 pts**
2. Déterminer une base et la dimension pour V_A et pour $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, où **4 pts**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $t \in \mathbb{R}$, on considère le système linéraire ci-dessous, d'inconnues x, y, z et w :

$$\begin{cases} \quad\; - y - 3z - w = 0 \\ x \quad\; - z + w = 1 \\ -x - y - z + 2w = t \\ \quad\; 2y + 5z - 2w = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de t pour laquelle le système admet au moins une solution. **2 pts**
2. Décrire l'ensemble des solutions pour la valeur de t trouvée en (1). **2 pts**

Exercice 3. Pour chacune des matrices suivantes : **1 + 2 + 3 pts**

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. dire si elle est inversible, en justifiant votre réponse,
2. et si elle est inversible, calculer son inverse, et sinon donner une (des) équation(s) cartésienne(s) de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.

Exercice 4. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner la définition de la transposée A^t de A. Donner la définition de "A est symétrique". **0,5 + 0,5 pt**
2. Donner, en fonction de A^t et B^t, les expressions $(AB)^t$ et $(A^k)^t$ pour tout entier $k \geq 1$. **0,5 + 0,5 pt**
3. On suppose que est A symétrique, montrer que pour tous entiers $m, k \geq 1$ la matrice $(B^t)^m A^k B^m$ est également symétrique. **1 pt**
4. On suppose que A est symétrique et inversible, montrer que A^{-1} est aussi symétrique. **1 pt**
5. On rappelle qu'une matrice carrée A est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = \mathbf{0}$. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible. **1 pt**