Algèbre Linéaire

Contrôle continu 6
13/04/2017

Questions de cours

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie avec bases respectivement $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_p\}$, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.

a) Définir la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Corrigé. *Soient $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots a_{p1}w_p \ ; \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots a_{p2}w_p \ ; \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots a_{pn}w_p \ ; \end{aligned}$$

alors la matrice associée à f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

b) Si $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, que représente le produit

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ ?$$

Corrigé. *C'est un vecteur dont les composantes sont les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}'$:*

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

avec $f(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots y_pw_p$.

Exercice (Toutes les réponses doivent être justifiées)

Considérons l'application linéaire suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - z,\ x, 2y + z) \end{array}.$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = ((1, 2, 0), (0, -1, 2), (1, 1, 1))$.

a) Écrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

Corrigé.

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= (1,1,0) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)\ ;\\
f(0,1,0) &= (0,0,2) = 0\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 2\cdot(0,0,1)\ ;\\
f(0,0,1) &= (-1,0,1) = -1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1).
\end{aligned}$$

On obtient :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. *Il suffit de montrer que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a rang 3.

Après échelonnement on obtient

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque A' est échelonnée et elle n'a aucune ligne nulle son rang est 3*, d'où aussi le rang de A est* 3.

c) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Corrigé.

$$\begin{aligned}
(1,2,0) &= 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)\ ;\\
(0,-1,2) &= 0\cdot(1,0,0) - 1\cdot(0,1,0) + 2\cdot(0,0,1)\ ;\\
(1,1,1) &= 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1).
\end{aligned}$$

On obtient :

$$P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Calculer P^{-1}.

Corrigé.

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) En déduire la matrice $M_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Corrigé.

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) = P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot P =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ -2 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

f) Déterminer $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.

Corrigé.

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$