Algèbre Linéaire

Contrôle continu 5 - Corrigé
05/04/2017

Questions de cours

1) Soient E et F deux espaces vectoriels réels et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si $H \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(H) \subseteq F$ est un sous-espace vectoriel de F.

   Corrigé.

   - *$f(H) \neq \emptyset$, puisque $0_E \in H$ et donc $0_F = f(0_E) \in f(H)$.*
   - *Soient $y_1, y_2 \in f(H)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in H$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Il s'ensuit que $y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(H)$ puisque $x_1 + x_2 \in H$.*
   - *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in f(H)$. Alors il existe $x \in H$ tel que $y = f(x)$. Il s'ensuit que $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(H)$ puisque $\lambda x \in H$.*

2) Définir le noyau et l'image d'une application linéaire, puis énoncer le théorème du rang.

   Corrigé. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de E défini par :*

   $$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

   L'image de f est le sous-espace vectoriel de F défini par :

   $$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \in F : x \in E\}.$$

   Théorème du rang : *Soit $f : E \to F$ une application linéaire de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Alors*

   $$\dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim E.$$

3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une application linéaire. Est-ce que f peut être surjective ? Justifiez votre réponse.

   Corrigé. *Si par l'absurde f était surjective alors $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et d'après le théorème du rang :*

   $$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

   On obtiendrait donc

   $$\dim \mathrm{Ker}(f) = -1.$$

   ce qui n'est pas possible. On en déduit que f ne peut pas être surjective.

Exercice (Toutes les réponses doivent être justifiées)

3) Considérons l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y,\ x - z) \end{array}.$$

- Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire leurs dimensions.

  Corrigé.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(0,0)\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{l} x+y=0\\ x-z=0\end{array}\right.\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{l} y=-x\\ z=x\end{array}\right.\right\} = \left\{(x,-x,x)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}.\end{aligned}$$

  On en déduit qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ *est* $((1,-1,1))$ *et que* $\mathrm{Ker}(f)$ *est de dimension* 1.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} = \mathrm{Vect}\{(1,1),(1,0)),(0,-1)\}\\ &= \mathrm{Vect}\{(1,0)),(0,-1)\}.\end{aligned}$$

  On en déduit qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ *est* $((1,0),(0,-1))$ *et que* $\mathrm{Im}(f)$ *est de dimension* 2.

- L'application f est-elle injective ? Surjective ?

  Corrigé. *Puisque* $\mathrm{Ker}(f)\neq\{(0,0,0)\}$ *l'application* f *n'est pas injective. Elle est par contre surjective car* $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\{(1,0)),(0,-1)\}=\mathbb{R}^2$.

- Décrire l'ensemble $f^{-1}(1,0)$.

  Corrigé.

$$\begin{aligned}f^{-1}(1,0) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(1,0)\} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{l} x+y=1\\ x-z=0\end{array}\right.\right\}\\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \left\{\begin{array}{l} y=1-x\\ z=x\end{array}\right.\right\} = \left\{(x,1-x,x)\in\mathbb{R}^3 : x\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$