Algèbre Linéaire

Contrôle continu 4 - Corrigé
08/03/2017

Questions de cours

1) Quelle est la condition sur les tailles des matrices A et B pour que le produit AB soit défini ?

Corrigé. *Pour que le produit AB soit défini, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.*

2) Une fois fixées les bonnes tailles, exprimer le coefficient (i, j) de AB en fonction des coefficients de A et de B.

Corrigé. *Si l'on note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le coefficient (i, j) de AB est donné par*

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

3) Donner la définition de matrice inversible.

Corrigé. *Une matrice A carrée de taille n est inversible s'il existe une matrice B (également carrée de taille n) telle que $AB = BA = I_n$. Une telle matrice B, si elle existe, est alors unique et on l'appelle* inverse *de A, et on la note A^{-1}.*

Exercice (Toutes les réponses doivent être justifiées)

4) Calculer les produits des matrices suivantes :

(a) AB et BA où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé. *On a $AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ -6 & 2 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$*

(b) A^3, avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé. *On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \\ 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$*

5) La matrice suivante, est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé. *Supposons par l'absurde que* A *est inversible et notons* $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.
On a $AB = I_3$, *donc*

$$\begin{pmatrix} -b_{11} + 2b_{21} + 4b_{31} & -b_{12} + 2b_{22} + 4b_{32} & -b_{13} + 2b_{23} + 4b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 5b_{11} + 3b_{21} + b_{31} & 5b_{12} + 3b_{22} + b_{32} & 5b_{13} + 3b_{23} + b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi les 9 équations que l'on obtient, il y a en particulier l'équation $0 = 1$, *qui est clairement absurde. On en conclut que* A *n'est pas inversible.*