Algèbre Linéaire

Contrôle continu 1 - Corrigé
23/01/2017

Questions du cours

1) Donner la définition d'espace vectoriel réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Corrigé. *Un espace vectoriel réel est un ensemble E muni de deux lois :*

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall\, u, v \in E,\ u + v = v + u$ (commutativité de $+$) ;
2. $\forall\, u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w)$ (associativité de $+$) ;
3. $\exists\, 0_E \in E$ tel que $\forall\, u \in E$ on a $u + 0_E = 0_E + u = u$ (élément neutre) ;
4. $\forall\, u \in E,\ \exists - u \in E$ tel que $u + (-u) = -u + u = 0_E$ (opposé) ;
5. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, u, v \in E,\ \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$;
6. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$;
7. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in E,\ (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$;
8. $\forall\, u \in E,\ 1 \cdot u = u$.

2) Donner un exemple d'espace vectoriel réel, en précisant les lois d'addition et de multiplication par scalaire.

Corrigé. *L'ensemble $E = \{0\}$ est un exemple d'espace vectoriel réel avec les lois :*

$$+ : \begin{array}{ccc} \{0\} \times \{0\} & \to & \{0\} \\ (0, 0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \{0\} & \to & \{0\} \\ (\lambda, 0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

E est appelé espace vectoriel trivial.

3) Soit E un espace vectoriel réel. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F \subset E$ soit un sous-espace vectoriel ?

Corrigé. *$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :*

- $F \neq \emptyset$;
- $\forall\, u, v \in F,\ u + v \in F$;
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in F,\ \lambda u \in F$.

Exercice 1 (Toutes les réponses doivent être justifiées)

3) Parmi les ensembles suivants, reconnaissez les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$.

Corrigé. *Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:*

- $F \neq \emptyset$ car $(0, 0) \in F$;
- *Soient $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in F$. Alors $2x_1 - y_1 = 0$ et $2x_2 - y_2 = 0$. Considérons le vecteur $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. On a :*

$$2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = (2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) = 0 + 0 = 0,$$

  donc $u + v \in F$.
- *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y) \in F$. Alors $2x - y = 0$. Considérons le vecteur $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$. On a :*

$$2(\lambda x) - \lambda y = \lambda(2x - y) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

F vérifie donc les trois conditions nécessaires et suffisantes pour être un sous-espace vectoriel.

b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \leq 0\}$.

Corrigé. *Montrons que G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en donnant un contrexemple. Le vecteur $(-1, 1, 1) \in G$ (car $(-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1 \leq 0$), mais $-1 \cdot (-1, 1, 1) = (1, -1, -1) \notin G$ (car $1 \cdot (-1 \cdot (-1) = 1 > 0$).*
G donc ne satisfait pas à la troisième condition nécessaire pour être un sous-espace vectoriel.