

Algèbre Linéaire

PARTIEL 1 - 26 FÉVRIER 2016

DURÉE : 2 HEURES. SANS DOCUMENTS NI CALCULATRICES

Exercice 1.

1. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-ensemble F de E soit un sous-espace vectoriel de E .

Pour être un \mathbb{R} -sous espace vectoriel de E , F doit satisfaire les trois conditions nécessaires et suffisantes suivantes : (i) $F \neq \emptyset$; (ii) pour tous $v, w \in F$ on doit avoir $v + w \in F$; (iii) pour tout $v \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\lambda v \in F$. La condition (i) peut être remplacée par la condition équivalente (i') $0 \in F$ tandis que les conditions (ii) et (iii) peuvent être remplacées par la condition : pour tous $v, w \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\lambda v + \mu w \in F$.

2. Dans chacun des cas suivants, justifier si oui ou non l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E , muni de ses lois usuelles :

(a) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 2z = 0 \text{ et } z = 1\}$.

La condition $z = 1$ implique que $0 \notin \mathbb{R}^3$. Par conséquent F n'est pas un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$ car il ne satisfait pas la condition (i').

(b) $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$.

F est bien un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}[X]$. En effet (i) le polynôme nul appartient à F car sa valeur en tout point de \mathbb{R} , et en particulier en $x = 1$, vaut 0 ; (ii) soient $P, Q \in F$, on a $(P + Q)(1) = P(1) + Q(1)$, par définition de polynôme somme, $P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0$, car $P, Q \in F$, ce qui montre bien $P + Q \in F$; (iii) soient $P \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda P)(1) = \lambda(P(1)) = \lambda \cdot 0 = 0$, donc $\lambda P \in F$.

(c) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\}$.

F n'est pas un \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$. En effet, les deux vecteurs $(-1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ sont bien dans F (le produit $xyz = 0 \geq 0$ dans les deux cas) alors que leur somme $(-1, 1, 1)$ n'appartient pas à F , car $xyz = -1 < 0$: la condition (ii) n'est donc pas remplie. En prenant $v = (1, 1, 1)$ et $\lambda = -1$ on voit que la condition (iii) n'est remplie non plus.

Exercice 2.

1. Rappeler les définitions de famille libre et génératrice d'un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Une famille A d'un espace vectoriel E est dite libre si pour toute combinaison linéaire $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ nulle d'éléments v_1, \dots, v_k de A à coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\lambda_i = 0$, pour tout $i = 1, \dots, k$.

Une famille A d'un espace vectoriel E est dite génératrice si tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de A . De façon équivalente, la famille A est génératrice si $E = \text{Vect}(A)$.

Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

$$v_1 = 1 - X, \quad v_2 = 1 + X^2, \quad v_3 = 1 + 2X - 3X^2.$$

2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et puisque la famille donnée a précisément trois éléments, pour montrer qu'elle est une base, il faut est suffit de montrer, par exemple, qu'elle est une famille génératrice d'après un résultat vu en cours. Les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ sont exactement ceux qu'on peut écrire de la forme $aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout choix de $a, b, c \in \mathbb{R}$ il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $aX^2 + bX + c = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. On a $aX^2 + bX + c = \alpha(1 - X) + \beta(1 + X^2) + \gamma(1 + 2X - 3X^2) = (\alpha + \beta + \gamma) + (2\gamma - \alpha)X + (\beta - 3\gamma)X^2$. En égalant les coefficients on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = c \\ 2\gamma - \alpha = b \\ \beta - 3\gamma = a \end{cases}$$

qui admet comme unique solution

$$\begin{cases} \alpha = (-a - 2b + c)/3 \\ \beta = (a + b + c)/2 \\ \gamma = (-a + b + c)/6 \end{cases}$$

Le polynôme $aX^2 + bX + c$ est bien combinaison linéaire des trois éléments de la famille donnée qui est donc une base.

3. Soit $u = 1 + X + X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base \mathcal{B} .

Avec la notation du point précédent, le polynôme u s'obtient en choisissant $a = b = c = 1$ ce qui donne les coordonnées $(\alpha = -2/3, \beta = 3/2, \gamma = 1/6)$.

4. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + a \cdot v_3)$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

S'agissant encore une fois d'une famille ayant autant d'éléments que la dimension de l'espace, d'après un résultat du cours, pour répondre à la question il suffit de déterminer pour quelles valeurs de a la famille est libre. Notons d'abord que pour $a = 0$ la famille est liée car un vecteur est répété. Considérons une combinaison nulle des vecteurs de la famille : $0 = \alpha v_1 + \beta(v_1 + v_2) + \gamma(v_1 + v_2 + a \cdot v_3) = (\alpha + \beta + \gamma)v_1 + (\beta + \gamma)v_2 + a\gamma v_3$. Puisque la famille \mathcal{B} est libre car elle est une base, on doit avoir $\alpha + \beta + \gamma = \beta + \gamma = a\gamma = 0$. Si $a \neq 0$ on voit que l'unique possibilité est $\alpha = \beta = \gamma = 0$: dans ce cas la famille est libre donc une base. Pour le cas qui reste, on a déjà remarqué que la famille ne peut pas être une base. Les valeurs a pour lesquelles la famille \mathcal{B}' est une base sont donc tous les réels non nuls.

Exercice 3.

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(0, 1, 0), (-1, 1, 1), (-2, 3, 2)\}$ deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

1. Trouver la dimension et déterminer une base de chacun des sous-espaces F et G .

En tenant compte qu'une équation paramétrique du plan vectoriel F est

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x - y \end{cases}$$

on en déduit qu'une base de F est constituée des vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$. Sa dimension est 2. Pour G on voit aisément que la famille qui l'engendre est liée : en effet

le troisième vecteur est égal au premier plus deux fois le deuxième. En revanche, les deux premiers vecteurs de la famille constituent une famille libre, car ils ne sont pas colinéaires, et sont donc une base de G . L'espace G a donc dimension 2.

2. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?

Un théorème vu en cours dit que E est la somme directe de F et G si et seulement si toute famille obtenue en prenant les vecteurs d'une base de F et ceux d'une base de G est une base de E . Or une telle famille a quatre éléments alors qu'une base de \mathbb{R}^3 doit avoir trois éléments, à savoir autant d'éléments que la dimension de l'espace. On en déduit qu'on n'a pas $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

3. Déterminer une base de $F \cap G$.

Les vecteurs de $F \cap G$ sont ceux de G , et donc de la forme $(-\beta, \alpha + \beta, \beta)$, qui satisfont l'équation de F , $x + y + z = 0$. En remplaçant on obtient $0 = -\beta + (\alpha + \beta) + \beta = \alpha + \beta$. Les vecteurs de l'intersection sont donc de la forme $(-\beta, 0, \beta)$. L'intersection est un espace de dimension 1 (ce qui découle aussi de la formule de dimension) dont une base est $((1, 0, -1))$. On remarquera que ce vecteur est l'un des vecteurs de la base de F .

4. Compléter la base de $F \cap G$ donnée à la question précédente en une base de \mathbb{R}^3 . En déduire un sous-espace vectoriel H de \mathbb{R}^3 tel que $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{R}^3$.

Pour compléter la base de $F \cap G$ on peut choisir de prendre la base de F et lui ajouter le vecteur $(0, 1, 0)$: on vérifie aisément que ce vecteur n'est pas contenu dans F et donc la famille qu'il constitue avec les deux autres est libre. En conclusion une base de \mathbb{R}^3 est donnée par $((1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 1, 0))$ et un supplémentaire de $F \cap G$ par $\text{Vect}((0, 1, -1), (0, 1, 0))$, à savoir le plan vectoriel d'équation $x = 0$.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{Q} .

1. Soient $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in E$. Montrer que $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}$ si et seulement si $v_i \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}, \forall 1 \leq i \leq n$.

Supposons $v_i \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}, \forall 1 \leq i \leq n$. Dans ce cas $\text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient v_1, \dots, v_n . Il doit donc contenir $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$ qui est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant v_1, \dots, v_n .

Supposons maintenant $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}$. Puisque $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$ contient v_1, \dots, v_n par construction, v_1, \dots, v_n sont aussi contenus dans $\text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}$ a fortiori.

2. Montrer que pour tout $u, v \in E$, $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u + v, u - v\}$.

Les vecteurs $u + v$ et $u - v$ sont combinaisons linéaires de la famille (u, v) et sont donc contenus dans $\text{Vect}\{u, v\}$. D'après le point précédent on a $\text{Vect}\{u + v, u - v\} \subseteq \text{Vect}\{u, v\}$. Or on a $u = [(u + v) + (u - v)]/2$ et $v = [(u + v) - (u - v)]/2$. Il en suit que $u, v \in \text{Vect}\{u + v, u - v\}$ et donc, encore d'après le premier point, $\text{Vect}\{u, v\} \subseteq \text{Vect}\{u + v, u - v\}$. On a donc montré par double inclusion que les sous-espaces coïncident.

3. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs non nuls. Montrer que la famille (u, v) est libre si et seulement si $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u\} \oplus \text{Vect}\{v\}$.

Puisque les vecteurs u et v sont non nuls, chacun constitue une famille libre et est donc une base de l'espace qu'il engendre. Les espaces $\text{Vect}\{u\}$ et $\text{Vect}\{v\}$ sont en somme directe

si et seulement si la famille obtenue comme union d'une base du premier et d'une base du deuxième est une base de l'espace somme. En considérant les bases (u) et (v) on a que l'espace somme est une somme directe si et seulement si (u, v) est une base de la somme. Puisque cette famille est toujours génératrice, cela est le cas si et seulement si la famille (u, v) est libre. On peut aussi raisonner en utilisant la formule dimensionnelle : $\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$. Ici on sait que $\dim F = \dim G = 1$. Il en suit que l'espace somme est une somme directe si et seulement si sa dimension est 2, si et seulement si sa famille génératrice (u, v) est aussi une base, donc libre.