Aix-Marseille Université 2015-2016

Algèbre Linéaire

Partiel 1 - 26 février 2016

Durée : 2 heures. Sans documents ni calculatrices

Exercice 1.

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-ensemble F de E soit un sous-espace vectoriel de E.
2. Dans chacun des cas suivants, justifier si oui ou non l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, muni de ses lois usuelles :
   (a) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 2z = 0 \text{ et } z = 1\}$.
   (b) $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$.
   (c) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \geq 0\}$.

Exercice 2.

1. Rappeler les définitions de famille libre et génératrice d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Considérons trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :
   $$v_1 = 1 - X, \quad v_2 = 1 + X^2, \quad v_3 = 1 + 2X - 3X^2.$$
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $u = 1 + X + X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + a \cdot v_3)$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(0, 1, 0), (-1, 1, 1), (-2, 3, 2)\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver la dimension et déterminer une base de chacun des sous-espaces F et G.
2. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?
3. Déterminer une base de $F \cap G$.
4. Compléter la base de $F \cap G$ donnée à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire un sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ tel que $(F \cap G) \oplus H = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Soient $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in E$. Montrer que $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}$ si et seulement si $v_i \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_m\}$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
2. Montrer que pour tout $u, v \in E$, $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u + v, u - v\}$.
3. Soient $u, v \in E$ deux vecteurs non nuls. Montrer que la famille (u, v) est libre si et seulement si $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u\} \oplus \text{Vect}\{v\}$.