

Site : Luminy St-Charles St-Jérôme Cht-Gombert Aix-Montperrin Aubagne-SATIS
 Sujet de : 1^{er} semestre 2^{ème} semestre Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
 Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques et Informatique
 Code du module : SIM2U2 Libellé du module : Algèbre linéaire 1
 Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1. Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1. Citer le théorème du rang.

Soient E et F deux K -espaces vectoriels, E de dimension finie, et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a l'égalité suivante :

$$\dim E = \dim \ker f + \text{rk } f$$

où $\text{rk } f = \dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f)$.

2. Soient E, F deux K -espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Montrer que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ si et seulement si f est injective.

Si f est une application linéaire on a $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0f(0_E) = 0_F$: l'image du vecteur nul est toujours le vecteur nul. Si f est injective il s'ensuit que l'image réciproque 0_F ne peut contenir que 0_E . Par ailleurs, si f n'est pas injective, il existe $v, u \in E$, $v \neq u$, tels que $f(v) = f(u)$. Par linéarité on a $f(v - u) = f(v) - f(u) = 0$. Il s'en suit que, dans ce cas, $\text{Ker}(f)$ doit contenir aussi le vecteur non nul $v - u$.

3. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Donner la définition d'un supplémentaire de F dans E .

Un sous-espace G de E est un supplémentaire de F dans E si $E = F \oplus G$, i.e. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^4 , on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 1, 3) \quad v_2 = (3, 1, 2, 1) \quad v_3 = (1, 2, 0, 1) \quad v_4 = (0, 5, 0, 6)$$

et on note

$$E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par ces quatre vecteurs.

1. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une famille liée; en extraire une base de E . Quelle est la dimension de E ?

On considère le système linéaire $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$. Par échelonnement on trouve les solutions du système $\alpha = -2\delta$, $\beta = \delta$, $\gamma = -\delta$ et on remarque que la famille a rang 3. La famille est donc liée : en effet $2v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0$. Par ailleurs, la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre et elle est donc une base de E qui a dimension 3. (Pour échelonner totalement on peut faire $[L_1, L_2 - 2L_1, L_3 - L_1, L_4 - 3L_1]$, $[L_1, -L_3, L_2, L_4]$, $[L_1, L_2, L_3 + 5L_2, L_4 + 8L_2]$, $[L_1, L_2, L_3/5, L_4/6]$, $[L_1, L_2, L_3, L_4 - L_3]$, $[L_1 - L_3, L_2 - L_3, L_3, L_4]$, $[L_1 - 3L_2, L_2, L_3, L_4]$.)

2. Donner une équation (ou des équations) de E . (Rappel : elles sont de la forme : $ax + by + cz + dt = 0$)

L'espace E est engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ donc les vecteurs v de E sont de la forme $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Cela donne directement une équation paramétrique de E :

$$\begin{cases} x = \alpha + 3\beta + \gamma \\ y = 2\alpha + \beta + 2\gamma \\ z = \alpha + 2\beta \\ t = 3\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

En éliminant les paramètres α , β et γ on obtient une équation pour E : $7x - 6y - 10z + 5t = 0$. Pour éliminer les paramètres on peut répéter le même échelonnement vu à la question précédente.

3. Donner un supplémentaire de E dans \mathbb{R}^4 , et en donner une base.

En tenant compte de la formule dimensionnelle ($\dim E + \dim H = \dim \mathbb{R}^4$, où H est un supplémentaire de E dans \mathbb{R}^4), un supplémentaire de E doit avoir dimension 1. Le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^4 , e_1 , n'est pas contenu dans E car il ne satisfait pas l'équation trouvée à la question précédente. Il s'ensuit que la droite de vecteur directeur e_1 est un supplémentaire de E : $\{e_1\}$ en est une base par construction et ses équations sont $y = z = t = 0$. Une autre possibilité est de prendre, à la place de e_1 , le vecteur $(7, -6, -10, 5)$ qui est orthogonal à l'hyperplan E .

Exercice 3. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + 3z, -x + y - 2z).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux vecteurs de \mathbb{R}^3 et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f[(x, y, z) + (x', y', z')] = f((x+x', y+y', z+z')) = ((x+x') + 2(y+y') - (z+z'), 2(x+x') - (y+y') + 3(z+z'), -(x+x') + (y+y') - 2(z+z')) = ((x+2y-z) + (x'+2y'-z'), (2x-y+3z) + (2x'-y'+3z'), (-x+y-2z) + (-x'+y'-2z')) = f((x, y, z)) + f((x', y', z'))$ et $f[\lambda(x, y, z)] = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + 2\lambda y - \lambda z, 2\lambda x - \lambda y + 3\lambda z, -\lambda x + \lambda y - 2\lambda z) = (\lambda(x+2y-z), \lambda(2x-y+3z), \lambda(-x+y-2z)) = \lambda f((x, y, z))$.
3. Ecrire $A = M_B(f)$ la matrice de f dans la base canonique B de \mathbb{R}^3 .
On note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base canonique. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

car $f(e_1) = (1, 2, -1)$, $f(e_2) = (2, -1, 1)$ et $f(e_3) = (-1, 3, -2)$

4. Déterminer une base du noyau et de l'image de f . En déduire leurs dimensions.
On remarque que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires et forment donc une famille libre. Ceci montre $\text{rk } f \geq 2$. Par ailleurs $0 = f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) = f(e_1 - e_2 - e_3)$ ce qui montre que $\dim \ker f \geq 1$. D'après le théorème du rang, on a que le noyau de f a dimension 1 et comme base le vecteur $(1, -1, -1) = e_1 - e_2 - e_3$ et l'image de f a dimension 2 et une base constituée par les deux vecteurs $f(e_1) = (1, 2, -1)$ et $f(e_2) = (2, -1, 1)$.
5. L'application f est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?
L'application n'est ni injective ni surjective donc elle ne peut pas être un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
6. On considère maintenant les trois vecteurs suivants :

$$X_1 = (1, -1, 1) \quad X_2 = (1, 1, -1) \quad X_3 = (-1, 1, 1).$$

- (a) Montrer qu'ils forment une base B' de \mathbb{R}^3 .

Il suffit de considérer la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et de l'échelonner totalement grâce, par exemple, aux opérations élémentaires suivantes : $[L_1, L_2 + L_1, L_3 - L_1]$, $[L_1, L_2, L_3 + L_2]$, $[L_1, L_2/2, L_3/2]$, $[L_1 - L_2 + L_3, L_2, L_3]$. La matrice obtenue est l'identité ce qui montre bien que les trois vecteurs donnés forment une base.

- (b) Ecrire la matrice de passage $P = P_{B \rightarrow B'} = M_{B', B}(Id)$ de la base canonique à la base B' .

P est la matrice considérée au point précédent.

- (c) Calculer l'inverse de la matrice P .

Les opérations élémentaires vues au point (a) permettent de passer de la matrice identité à la matrice P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- (d) En déduire la matrice $A' = M_{B'}(f)$ qui représente l'application f dans cette nouvelle base (au départ et à l'arrivée). Donner une relation entre A et A' .

On a la relation $A' = P^{-1}AP$ ce qui permet de calculer A' :

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) Soit $X \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées (x', y', z') dans la base B' . Déterminer $f(X)$ en fonction de (x', y', z') .

On a

$$f(x', y', z') = (-3x' + 3y', 2x' + y', x').$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie, et f un endomorphisme de E .

On considère l'ensemble $P = \{x \in E : f(x) = x\}$.

1. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E .

On a déjà remarqué dans l'exercice 1 qu'une application linéaire f envoie le vecteur nul sur le vecteur nul : $f(0) = 0$. Cela montre que $0 \in P$. Supposons que l'on a $x, y \in P$. Par linéarité de f on a : $f(x + y) = f(x) + f(y) = x + y$, où la dernière égalité découle du fait que $x, y \in P$. Il en suit $x + y \in P$. Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in P$. On a $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda x$ et donc $\lambda x \in P$. Il s'ensuit que P est un sous-espace vectoriel de E .

2. Montrer que si $f \circ f = f$, alors $P = \text{Im}(f)$.

On raisonne par double inclusion. Puisque pour tout vecteur $x \in P$ on a $x = f(x)$, l'inclusion $P \subset \text{Im}(f)$ est évidente et ne nécessite pas l'hypothèse $f \circ f = f$. Maintenant, soit $y \in \text{Im}(f)$: il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$. En évaluant f des deux côtés de l'égalité et en exploitant l'hypothèse on obtient : $f(y) = f \circ f(z) = f(z) = y$ ce qui montre $y \in P$ et donc $\text{Im}(f) \subset P$.

3. Montrer que si $f \circ f = f$, alors $E = \text{Ker}(f) \oplus P$.

Montrons d'abord que $\text{ker}(f) \cap P = \{0\}$. Soit $x \in \text{ker}(f) \cap P$. Puisque $x \in \text{ker}(f)$ on a $f(x) = 0$, et puisque $x \in P$ on a $x = f(x)$. On en déduit que $x = 0$. Puisque 0 est contenu dans le sous-espace vectoriel $\text{ker}(f) \cap P$ on a bien $\text{ker}(f) \cap P = \{0\}$. Maintenant, soit $x \in E$. On peut écrire $x = f(x) + (x - f(x))$. On remarque maintenant que $f(x) \in \text{Im}(f) = P$ d'après le point précédent. De plus, $x - f(x) \in \text{ker}(f)$ car $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = f(x) - f(x) = 0$ à cause de la linéarité et de l'hypothèse $f \circ f = f$. On a donc $E = \text{ker}(f) + P$ et, en tenant compte du fait que $\text{ker}(f) \cap P = \{0\}$, cela permet de conclure $E = \text{ker}(f) \oplus P$. Cette preuve n'utilise pas le fait que E est de dimension finie. En utilisant le fait que la dimension de E est finie et $\text{ker}(f) \cap P = \{0\}$ on peut déduire $E = \text{ker}(f) \oplus P$ en exploitant la formule de dimension et celle du rang : $\dim(\text{ker}(f) + P) + \dim(\text{ker}(f) \cap P) = \dim \text{ker}(f) + \dim P = \dim \text{ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E$.