Aix–Marseille Université 2015-2016

Algèbre Linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES N°4.3

1 Noyau et image d'une matrice

Exercice 1 * Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner les équations qui définissent le noyau de chacune de ces matrices. Résoudre le système obtenu par l'échelonnement.

2. Donner une base du noyau et déterminer sa dimension.

3. Grâce au théorème du rang, déduire la dimension de l'image de la matrice en question. Trouver une base de l'image.

Exercice 2 *

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les conditions sur b_1, b_2 et b_3 pour que l'équation $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ait une solution.

2. Décrire gémétriquement $\mathrm{I}mA$ (plan ? droite ? tout l'espace ?)

3. Décrire $\mathrm{Ker}A$. Trouver une base du noyau.

Exercice 3 * Trouver une base du noyau et une base de l'image de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Considérons la matrice $n \times n$, M_n, dont les coefficients sont les n^2 premiers entiers positifs écrits dans l'ordre croissant l'un à la suite de l'autre, colonne par colonne. Par exemple

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer le rang de M_4.

ii) Calculer le rang de M_n pour tout entier $n \geq 2$.

iii) Pour quels entiers n la matrice M_n est-elle inversible ?

Exercice 5

1. Donner une matrice dont l'image est engendrée par le vecteur $(1, 5)$.

2. Donner une matrice dont le noyau est engendré par le vecteur $(1, 2, 3)$.

3. Donner une matrice dont le noyau contient le vecteur $(1, 2, 0)$ et l'image les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercice 6 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Décrivez géométriquement l'image et le noyau des matrices A, A^2 et A^3 .

Exercice 7 Soit A une matrice carrée.

1. Quelle relation y a-t-il entre Ker(A) et Ker(A^2) ? Sont-ils nécessairement égaux ? Mêmes questions pour I$m(A)$ et I$m(A^2)$.

2. Plus généralement que peut-on dire de Ker(A), Ker(A^2), Ker(A^3), Ker(A^4), etc.

3. Même question pour I$m(A)$, I$m(A^2)$, I$m(A^3)$, I$m(A^4)$, etc.

4. Supposons que Ker(A^2) = Ker(A^3). Est-ce que Ker(A^3) = Ker(A^4) ?

Exercice 8 Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in M_{p,m}(\mathbb{R})$, telles que Ker$(A) = \{0\}$ et Ker$(B) = \{0\}$. Quand est-ce que Ker(A) = Ker(B) (il n'y a aucune erreur dans la question) ? Dans tous les cas trouver Ker(AB).

Exercice 9 Soient $A \in M_{5,4}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. En raisonnant géométriquement (utiliser le théorème du rang), montrer pourquoi AB n'est jamais inversible.

Exercice 10 Répondre aux questions suivantes en raisonnant sur l'application linéaire associée à une matrice.

1.Montrer qu'une matrice qui a deux colonnes égales n'est pas inversible.

2. Les colonnes d'une matrice inversible sont-elles toujours linéairement indépendantes ?

3. Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, telles que $AB = I_n$. On suppose que $n \neq p$. Les vecteurs colonnes de B sont-ils linéairement indépendants ? Et ceux de A ?

4. Considérons une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Supposons que les vecteurs colonnes de A soient linéairement indépendants, ainsi que les vecteurs colonnes de B. Les vecteurs colonnes de AB sont-ils

linéairement indépendants ?

2 Changement de base

Exercice 11 * On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.

2. (a) Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (0, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Vérifier que $A' = P^{-1}AP$.
3. Mêmes questions avec la famille de vecteurs $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2)$ avec $\boldsymbol{e}''_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{e}''_2 = (1, -1)$

Exercice 12

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1).$$

1. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.
2. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{I}d_{\mathbb{R}^2})$ de l'application identité de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.
4. En déduire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
5. Ecrire la matrice A' de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}'$ et vérifier que $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 13 * Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\boldsymbol{u} = (1, -1, 0), \qquad \boldsymbol{v} = (1, 1, 1), \qquad \boldsymbol{w} = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que les trois vecteurs $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette base notée $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
2. On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z).$$

Déterminer la matrice de cette application dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer Ker(f). Quel est sa dimension ?
5. En déduire le rang de f et donner une base de $\mathrm{I}m(f)$.

Exercice 14 On considére l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(e_1) = (1, -1, 1), \;\; f(e_2) = (1, 1, -1) \;\; et \;\; f(e_3) = (1, 0, 0),$$

où $e_1,\ \ e_2\ \ et\ \ e_3$ sont les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

2. Ecrire la matrice A de l'application linéaire f en base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3.Déterminer le noyau et l'image de f. Donner une base du noyau et de l'image et en déduire leur dimensions respectives.

4.L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

On considère maintenant les trois vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 1), \qquad u_2 = (1, 1, -1), \qquad u_3 = (-1, 1, 1).$$

5. Montrer que les trois vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à cette nouvelle base notée $\mathcal{B}'$.

7. Calculer P^{-1} par échelonnement total.

8. En déduire la matrice A' qui représente l'application linéaire f dans cette nouvelle base.

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 1), \qquad \boldsymbol{b} = (1, -1, 1), \qquad \boldsymbol{c} = (1, 2, -1).$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que :

$$f(\boldsymbol{a}) = (2, 3, -1), \ \ f(\boldsymbol{b}) = (3, 0, -2), \ \ f(\boldsymbol{c}) = (2, 7, -1).$$

Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $f(x, y, z)$ en fonction de (x, y, z).

2. Même question pour l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$g(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}, \qquad g(\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{c}, \qquad g(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}.$$

3. Déterminer le noyau et l'image de ces deux applications linéaires ainsi que des bases de ces sous espaces.

Exercice 16 *

Dans $\mathbb{R}^3$ vérifier que les vecteurs suivants forment une base :

$$a = (4, 2, 0), \qquad b = (1, 2, -3), \qquad c = (0, 2, 5)$$

Trouver les images de la base canonique par l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(a) = 2, \qquad f(b) = -7, \qquad f(c) = -1,$$

Exercice 17

Dans l'espace $M_2(\mathbb{R})$, on considère le vecteur

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'endomorphisme $G : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ donné par la multiplication à gauche par P :

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \quad G(A) = PA.$$

1. Vérifier que G est effectivement une application linéaire.

On rappelle la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Trouver les images des matrices M_i par l'application G. En déduire alors la matrice de l'application G dans la base $\mathcal{B}$ (qui est donc une matrice 4×4).

3. Faire la même chose pour l'endomorphisme $D : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ qui est la multiplication à droite par P, c'est-à-dire $D(A) = AP$ pour tout $A \in M_2(\mathbb{R})$.