Aix–Marseille Université 2015-2016

Algèbre linéaire 1

PLANCHE D'EXERCICES 2

1 Calcul matriciel

Exercice 1 * Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer $5(A+2B)+4(2A-B)$.

ii) Trouver toutes les matrices X telles que $3(A+X)+5(3X+B) = A-B$.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la famille

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de E.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ 2a+b & -a+2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base de F.

Exercice 4 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b+c+d = 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer une base de G.

Exercice 5 Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.

Exercice 6 * Calculer, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués. Donner ensuite les transposées des produits.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 * Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

Des 25 possibilités AA, AB, AC, ..., ED, EE hypothétiques, déterminer et calculer les produits qui sont définis.

Exercice 8 Résoudre les équations matricielles suivantes. On commencera par déterminer la taille de la matrice cherchée X.

$$i)\ X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad ii)\ X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad iii)\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$iv)\ X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X, \quad v)\ X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad vi)\ X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad vii)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = I_2.$$

Exercice 9 Quelles sont parmi les matrices suivantes celles qui sont égales à $(A-B)^2$, quelque soient les matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$?

$$A^2 - B^2, \quad (B-A)^2, \quad A - 2AB + B^2, \quad (A-B)A - (A-B)B, \quad A^2 - AB - BA + B^2.$$

Exercice 10 * Soient A et B des matrices $n \times n$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B ?

1. $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$, 2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 3. $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Exercice 11 Trouver et démontrer par récurrence les formules explicites pour les puissances A^m, $m \geq 1$, où

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 * Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et posons $N = M - I_3$.

i) Calculer N^2, N^3 et en déduire N^k pour tout $k \geq 1$.

ii) Développer et simplifier l'expression $(N + I_3)^k$.

iii) En déduire la forme de M^k pour tout $k \geq 1$.

Exercice 13 Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. Les vecteurs X et Y peuvent être considérés comme des matrices à une colonne : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculez $X^t\, Y$. Que reconnaissez-vous ? Calculez ensuite XY^t.

Exercice 14 Soient A et B deux matrices symétriques. Les matrices A^2, AB, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, BAB et $BABA$ sont elles symétriques ? (si oui, justifier, sinon, donner un contre-exemple).

Exercice 15 Soit A une matrice $n \times p$.

1. Quelles sont les tailles respectives de AA^t et A^tA ?

2. Montrer que les coefficients diagonaux de AA^t et A^tA sont forcément positifs ou nuls.

3. Soit B une matrice $p \times p$ symétrique. Montrer que la matrice ABA^t est symétrique.

Exercice 16 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que le produit AB est symétrique si et seulement si les matrices commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$.

Exercice 17 Montrer que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2 Matrice inversible

Exercice 18 * Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On suppose que cette matrice est inversible. Calculer la matrice A^{-1} en fonction de a, b, c, et d par identification. Exprimer la condition sur a, b, c, et d pour que la matrice soit inversible.

Exercice 19 *

i) Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I_2 - A$. En déduire que A est inversible et trouver A^{-1}.

ii) Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $B^3 - B - 4I_3 = 0$. En déduire que B est inversible et trouver B^{-1}.

Exercice 20 * Supposons que $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 1$. Montrer que la matrice $(I_n - A)$ est inversible et que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

Exercice 21 Supposons que $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ soient inversibles. Les affirmations suivantes, sont-elles toujours vraies ?

i) A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

ii) $A + B$ est inversible et $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

iii) $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$.

iv) $ABA^{-1} = B$.

v) $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$.

vi) $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$.

vii) $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

Exercice 22 Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul on a $AX \neq 0$.

Exercice 23 Justifier si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (dans cet exercice, A et B sont 2 matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$) :

1) Si $AX = BX$ pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $A = B$.
2) La matrice Id_n est inversible mais la matrice 0_n ne l'est pas.
3) Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible. Et réciproquement ?

Exercice 24 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On suppose qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = 0$. Montrer que A n'est pas inversible.
2) On suppose qu'il existe un vecteur colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui n'est pas combinaison linéaire des colonnes de A. Montrer que A n'est pas inversible (on pourra raisonner par l'absurde et écrire $Y = A(A^{-1}Y)$).

Exercice 25 * Dans le centre de Genève certains parcmètres acceptent les pièces de 2 et 5 francs.

i) Un officier chargé du stationnement récupère 51 pièces pour une valeur totale de 144 francs. Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il ?

ii) Déterminer la matrice A qui, si on la multiplie par le vecteur $\begin{pmatrix} \text{nombre de pièces de 2 francs} \\ \text{nombre de pièces de 5 francs} \end{pmatrix}$ donne le vecteur $\begin{pmatrix} \text{valeur totale des pièces} \\ \text{nombre total de pièces} \end{pmatrix}$.

iii) Est-ce que la matrice A précédente est inversible ? Si oui trouver son inverse. Utiliser le résultat obtenu pour justifier votre réponse en i).

Exercice 26 Un joaillier utilisait pour ses bijoux un alliage de platine et un alliage d'argent ; les densités de ces alliages étaient exactement 20 et 10 grammes par cm^3 respectivement.
Le roi Hiéron de Syracuse commanda à ce joaillier une couronne d'une masse totale de 5 kg, en demandant que l'alliage de platine constitue au moins 90% de la masse totale. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il découvrit une méthode pour vérifier la composition de la couronne (c'est alors qu'il s'écria "Eurêka !" et se rua tout nu au palais du roi). En plongeant la couronne dans l'eau il constata que son volume était de 370 cm^3. De quelle quantité (en masse) de chaque alliage était constituée la couronne ? Le joaillier était-il un escroc ?

Etant donné un bijou produit par ce joaillier, déterminer la matrice qui, si on la multiplie par le vecteur $\begin{pmatrix} \text{masse de l'alliage de platine} \\ \text{masse de l'alliage d'argent} \end{pmatrix}$ donne le vecteur $\begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$.
Cette matrice est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. À l'aide de ce résultat vérifier votre première réponse.

Exercice 27 (Un modèle de prédation à deux niveaux) Dans la chaîne alimentaire, sur une période, le lion consomme 4 gazelles, 5 gnous et 2 antilopes. Le guépard, plus agile, consomme 7 gazelles et 1 antilope. Pour ne pas se laisser abattre, les gazelles, gnous et antilopes consomment quelques végétaux : arbres, pelouses, herbes hautes et racines. Une gazelle consomme $100g$ de feuilles d'arbres, $300g$ de pelouse, $150g$ d'herbes hautes et $50g$ de racines. Un gnou consomme $500g$ de feuilles d'arbres, $100g$ de pelouse, $750g$ d'herbes hautes et pas de racines. Une antilope consomme $200g$ de feuilles d'arbres, $400g$ de pelouse, $250g$ d'herbes hautes et $150g$ de racines. Malheureusement la pollution a affecté les arbres et la pelouse. La concentration de pesticide est de $c_1 = 30$ par gramme de feuille d'arbre et de $c_2 = 50$ par gramme de pelouse. Bien heureusement les racines et les herbes hautes sont préservées. Calculer la masse totale de pesticide ingérée par le lion et le guépard en effectuant le produit de trois matrices que l'on explicitera.