Algèbre et Arithmétique Effectives — 4/12/24

cours 13

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Alors il existe trois matrices P, L, E telles que

$$A = PLE$$

où :

- $P \in \mathcal{M}_m(K)$ est une matrice de permutation (c'est-à-dire, un produit de matrices obtenues de I_m, en échangeant deux lignes)
- $L \in \mathcal{M}_m(K)$ est une matrice triangulaire inférieure avec que des 1 sur la diagonale.
- $E \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ est une matrice sous forme échelonnée.

Exemple

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4/3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 A = E$$

$$\Updownarrow$$

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} P_3^{-1} E =$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L} E$$

Dém

Pour l'algorithme de Gauss on a juste besoin d'opérations de type permutation et transvection.

Il est simple de voir qu'on peut effectuer tous les permutations en premier :

$$\underbrace{T_s \cdots T_1}_{\text{transvections}} \underbrace{P_r \cdots P_1}_{\text{permutations}} A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{échelonnée}}}{E}$$

$$\Updownarrow$$

$$A = P_1^{-1} \cdots P_r^{-1} T_1^{-1} \cdots T_s^{-1} E$$

$$= \underbrace{P_1 \cdots P_r}_{P} \underbrace{T_1^{-1} \cdots T_s^{-1}}_{L} E$$

(produit de matrices triang. inf. avec que des 1 sur la diagonale)

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Alors il existe une unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente à A.

Dém

- Existence : Conséquence de l'Algorithme de Gauss-Jordan.

- Unicité : On procède par récurrence sur le nombre de colonnes.

  Si $n=1$: Soit $A \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$. Si $A \neq 0$ alors il existe unique matrice échelonnée réduite, équivalente à A.

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Si $A = \underline{0}$, elle est déjà réduite ✓

Si $n > 1$, supposons qu'il existe deux matrices E et E' échelonnées réduites équivalentes à A.
Alors il existe P, Q inversibles telles que

$$E = PA \quad \text{et} \quad E' = QA.$$

Soient A_*, E_*, E'_* les matrices obtenues en supprimant la dernière colonne de A, E et E'.

$$A = \begin{pmatrix} A_* & \boxed{} \end{pmatrix}$$

On remarque que $\overset{\in \mathcal{M}_{m,n-1}(K)}{E_*}$ et $\overset{\in \mathcal{M}_{m,n-1}(K)}{E'_*}$ sont également échelonnées réduites et équivalentes à A_*.

Donc, par hypothèse de récurrence, $E_* = E'_*$.

Il s'ensuit que E et E' peuvent différer que par la dernière colonne.

Si $E \neq E'$, alors $\exists\, i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$E_{i,n} \neq E'_{i,n}.$$

Montrons que cela est absurde.

Considérons le système homogène :

$$Ax = \underline{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$P^{-1}E\,x = 0 \iff Ex = \underline{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$Q^{-1}E'\,x = 0 \iff E'x = \underline{0}$$

Soit s une solution de $Ax = \underline{0}$ (s existe car il s'agit d'un système homogène).

$$\Rightarrow \quad Es = \underline{0} \quad \text{et} \quad E's = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad (E - E')\cdot s = \underline{0}$$

$$\left[\begin{pmatrix} E_* & \boxed{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overset{E_*}{\overset{\|}{E'_*}} & \boxed{2} \end{pmatrix} \right] s = \underline{0}$$

$$\text{ligne } i \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} s = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(E_{in} - E'_{in})}_{\neq 0} s_n = 0 \Rightarrow s_n = 0 \text{ pour toute solution } s \text{ de } Ax = 0$$

$\Rightarrow$ les colonnes n de E et E' doivent comporter un pivot (car sinon X_n serait une variable libre), qui est donc l'unique élément non nul de la dernière colonne.
Puisque seules les dernières lignes d'une forme échelonnée sont nulles le pivot sera sur la même ligne dans E et E'.

Exercices

1) Trouver des conditions sur a, b, c pour que le système suivant ait au moins une solution :

$$\begin{cases} x + 3y - z = a \\ x + y + 2z = b \\ \quad 2y - 3z = c \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & a \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 0 & 2 & -3 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & -2 & 3 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c+b-a \end{array}\right)$$

le système est comp.
$\Leftrightarrow \quad c+b-a = 0$

2) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une décomposition de A sous forme de produit PLE.

- Déterminer la forme échelonnée réduite de A.
- Résoudre le système qui a A pour matrice augmentée.

① Si $c+b-a=0$

$$\begin{cases} x+3y-z=a \\ -2y+3z=b-a \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=a+z \\ -2y=b-a-3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3y+a+z = -3\,\frac{3z+a-b}{2}+a+z = \frac{7z-a+3b}{2} \\ y=\frac{3z+a-b}{2} \end{cases}$$

Pour $a,b,c \in \mathbb{Q}$ telles que $c+b-a=0$ les solutions sont :

$$S=\left\{\left(\frac{7t-a+3b}{2}, \frac{3t+a-b}{2}, t\right), t \in K\right\}$$

(infinité de solutions).

② $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{P_1=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3-L_1]{T_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+L_2]{T_2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Donc :

$$T_4 T_3 T_2 T_1 P_1 A = E \implies$$

Donc :

$$A = P_1^{-1} T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} T_4^{-1} E =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot E =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E}$$

Pour déterminer la forme échelonnée réduite on repart de E :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_R \quad \text{Échelonnée réduite}$$

Donc le système qui a A comme matrice augmentée est équivalent au système qui a E_R comme matrice augmentée.

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \qquad\quad + 7X_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad X_3 - X_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = 1 \end{cases}$$

← pivot dans la dernière colonne

Le système est donc incompatible.