Algèbre et Arithmétique Effectives — 22/11/24
cours 11

Objectif : Résoudre un système linéaire.

Def : Soient $x_1, \dots, x_n$ des inconnues et K un corps.
Ex : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$

- Une équation linéaire à inconnues $x_1, \dots, x_n$ et coefficients dans K est une équation de la forme :

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad a_1, \dots, a_n, b \in K.$$

Une solution de $(*)$ est un élément $s = (s_1, \dots, s_n) \in K^n$ qui remplacé dans $(*)$ donne lieu à une identité.

- Si on considère en même temps m équations linéaires à inconnues $x_1, \dots, x_n$ on obtient un système de m équations linéaires à n inconnues et coefficients dans K.

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

avec $A_{ij}, b_i \in K$.

Une solution est un élément $s = (s_1, \dots, s_n) \in K^n$ qui est solution de chaque équation du système.

- Le système est dit homogène si $(b_1, \dots, b_m) = (0, \dots, 0)$

Dans ce cas l'élément $(0, \dots, 0) \in K^n$ est toujours une solution.

- Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution, sinon il est dit incompatible.

- Deux systèmes se disent équivalents s'ils ont les mêmes ensembles de solutions.

Exemple

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad x_2 - 3x_3 \qquad = 2 \\ \qquad\quad x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_3 = x_4$$

$x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 - 5x_4$

$\uparrow$

$x_2 = 2 + 3x_3 = 2 + 3x_4$

$\uparrow$

$x_3 = x_4$

$$S = \{(-1-5t, 2+3t, t, t),\ t \in K\} \subseteq K^4.$$

Ce système est simple à résoudre, car il est échelonné.

Exemple de système pas échelonné : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_4 = 2 \end{cases}$

Déf : Un système est sous forme échelonnée par lignes si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Les premiers éléments non nuls de chaque ligne sont dits pivots

Objectif 2 : À partir d'un système linéaire calculer un système linéaire échelonné à lui équivalent

Pour cela, on peut effectuer des opérations, dites opérations élémentaires qui ne changent pas l'ensemble de solutions d'un système.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES (sur les équations du système)

1) TRANSPOSITION OU PERMUTATION :

$L_i \longleftrightarrow L_j$ (échange de la ligne i avec la ligne j).

2) DILATATION

$\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$

$L_i \leftarrow \alpha L_i$ (multiplier par α tous les coefficients de la ligne i)

3) TRANSVECTION

$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ (ajouter à la i-ème ligne la j-ème multipliée par α)

Si $\alpha = 0$, cela ne change pas le système.

Écriture matricielle d'un système

$$\begin{cases} A_{11} x_1 + \cdots + A_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ A_{m1} x_1 + \cdots + A_{mn} x_n = b_m \end{cases} \iff AX = b, \text{ où}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K),$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(K) \cong K^m,$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrice augmentée : $(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \cdots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} & b_m \end{array}\right)$

<u>Notation</u> : On notera le système $Ax=b$ aussi (A,b)

On peut effectuer les opérations de transposition, dilatation et transvection directement sur les lignes de la matrice augmentée.

<u>Def</u> : Une matrice est sous forme échelonnée par lignes si le nombre de zéros précédent la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne, jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

MATRICE ÉCHELONNÉE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE NON ÉCHELONNÉE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> : Échelonner les matrices suivantes en effectuant des opérations élémentaires

sur $\mathbb{Q}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$