

Tutorato di GE220

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. Edoardo Sernesi

Tutori: Filippo Maria Bonci, Annamaria Iezzi e Maria Chiara Timpone

SOLUZIONI TUTORATO 2 (24 MARZO 2011)

1. Descrivere la topologia relativa su \mathbb{Z} come sottospazio di \mathbb{R} con la topologia cofinita. Dire se i punti sono chiusi in questa topologia. Dire se la topologia discreta è strettamente più fine giustificando la risposta.

Soluzione:

Ricordiamo che se (X, \mathcal{T}) è uno spazio topologico e S è un suo sottoinsieme, la topologia indotta da X su S , \mathcal{T}_S , è data dalla famiglia dei sottoinsiemi di S della forma $S \cap A$, al variare di A tra gli aperti di X .

Mostriamo, dunque, che la topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ su \mathbb{Z} , come sottospazio di \mathbb{R} con la topologia cofinita \mathcal{T} , è la cofinita, ovvero:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{C} := \{\emptyset; \mathbb{Z}; \mathbb{Z} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Dimostriamo ciò per doppia inclusione:

\subseteq : Sia $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{Z}} \Rightarrow A = \mathbb{Z} \cap B, B \in \mathcal{T}$; se $B = \emptyset \Rightarrow A = \mathbb{Z} \cap B = \emptyset \in \mathcal{C}$; se $B = \mathbb{R} \Rightarrow A = \mathbb{Z} \cap B = \mathbb{Z} \in \mathcal{C}$; altrimenti se $B = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \mathbb{Z} \cap B = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } x_i \notin \mathbb{Z} \forall i \\ \mathbb{Z} \setminus \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} & \text{dove } \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} = \{x_1, \dots, x_n\} \cap \mathbb{Z} \end{cases}$$

In ogni caso $A \in \mathcal{C}$.

\supseteq : $\emptyset = \mathbb{Z} \cap \emptyset \in \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$;
 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$;
 $\mathbb{Z} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap (\mathbb{R} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}) \in \mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$.

Tutti i punti sono chiusi. Infatti $\forall z \in \mathbb{Z}$ si ha $\{z\} = \mathbb{Z} \cap \{z\}$, dove $\{z\}$, essendo finito, è chiuso in \mathbb{R} .

La topologia discreta è strettamente più fine della cofinita. Questa è una conseguenza del fatto che \mathbb{Z} è un insieme infinito. Infatti considerando $\{z\}$ con $z \in \mathbb{Z}$ si ha che $\{z\}$ è aperto nella discreta, mentre non è aperto nella topologia cofinita in quanto $\mathbb{Z} \setminus \{z\}$ non è finito.

2. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$. Dire quale dei seguenti sottoinsiemi sono chiusi in X con la topologia di sottospazio di \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : xy = 1, x > 0\}; \\ B &= \{(\frac{1}{n}, 1) : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}; \\ C &= \{(x, y) : x + y = 1, x > 0, y > 0\}; \\ D &= \{(1, \frac{1}{n}) : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Soluzione:

A : A è chiuso in X . Infatti $A = A_1 \cap X$, dove $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Vediamo che A_1 è chiuso in \mathbb{R}^2 . Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$; f è continua. Ne segue che $A_1 = f^{-1}(1)$ è chiuso in quanto controimmagine di un chiuso ($\{1\}$) tramite un'applicazione continua.

B : B non è chiuso in X . Infatti, se per assurdo lo fosse si avrebbe $B = B_1 \cap X$ con B_1 chiuso in \mathbb{R}^2 ; ma allora $B \subseteq B_1 \Rightarrow B \cup D(B) = \overline{B} \subseteq B_1$ (indichiamo con \overline{B} la chiusura in \mathbb{R}^2) $\Rightarrow B \cup (0, 1) \subseteq B_1 \Rightarrow B_1 \cap X \supseteq B \cup \{(0, 1)\}$ (poichè $(0, 1) \in X$) $\Rightarrow B_1 \cap X \supsetneq B$ (poichè $(0, 1) \notin B$): assurdo.

C : C non è chiuso in X . Infatti, se per assurdo lo fosse si avrebbe $C = C_1 \cap X$ con C_1 chiuso in \mathbb{R}^2 ; ma allora $C \subseteq C_1 \Rightarrow C \cup D(C) = \overline{C} \subseteq C_1$ (indichiamo con \overline{C} la chiusura in \mathbb{R}^2) $\Rightarrow C \cup (0, 1) \subseteq C_1 \Rightarrow C_1 \cap X \supseteq C \cup \{(0, 1)\}$ (poichè $(0, 1) \in X$) $\Rightarrow C_1 \cap X \supsetneq C$ (poichè $(0, 1) \notin C$): assurdo.

D : D è chiuso in X . Infatti consideriamo $D_1 = D \cup \{(1, 0)\}$. D_1 è chiuso in \mathbb{R}^2 poichè contiene tutti i suoi punti di accumulazione ($D_1 = D_1 \cup D(D_1) = \overline{D_1}$). Inoltre si ha $D = D_1 \cap X$, cioè la tesi.

3. Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico e siano A e B sottoinsiemi di X ; verificare:

- (a) $\text{Fr}(A \cup B) \subseteq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$;
- (b) $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$; $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$;
- (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Soluzione:

- (a) Sia $x \in \text{Fr}(A \cup B)$ e supponiamo per assurdo che $x \notin \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.
Poichè $x \notin \text{Fr}(A) \Rightarrow x \in \text{Int}(A) \sqcup \text{Est}(A)$. Se $x \in \text{Int}(A) \exists U \in \mathcal{T}$ tale che $x \in U \subseteq A$. Avremmo che $x \in U \subseteq A \cup B$ e ciò implica $x \in \text{Int}(A \cup B)$ contro l'ipotesi, perciò $x \in \text{Est}(A)$.
Allo stesso modo avremo che $x \in \text{Est}(B)$, poichè $x \notin \text{Fr}(B)$.
Quindi $\exists U, V \in \mathcal{T}$ tali che $x \in U \cap V$ con $U \cap A = V \cap B = \emptyset$.
Ma $(U \cap V) \cap (A \cup B) = (U \cap V \cap A) \cup (U \cap V \cap B) = \emptyset \Rightarrow x \in \text{Est}(A \cup B)$ che è assurdo quindi $x \in \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.
- (b) In generale, è vero che se S, T sono sottoinsiemi di X tali che $S \subseteq T$ allora $\text{Int}(S) \subseteq \text{Int}(T)$. Nel nostro caso, essendo $A \cap B \subseteq A, B \subseteq A \cup B$ si ha $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A), \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$. Ne segue che $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$ e che $\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$. Rimane da dimostrare che $\text{Int}(A \cap B) \supseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$.
Sia $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T}$ tali che $x \in U \subseteq A$ e $x \in V \subseteq B$; allora $x \in U \cap V \subseteq A \Rightarrow x \in U \subseteq A$ e $x \in U \cap V \subseteq A \cap B \Rightarrow x \in \text{Int}(A \cap B)$.
- (c) Sappiamo che se S, T sono sottoinsiemi di X tali che $S \subseteq T$ allora $\overline{S} \subseteq \overline{T}$. Da cui $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$ e $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
Dimostriamo ora che $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
Sia $x \in \overline{A \cup B}$ e supponiamo, per assurdo, che $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Allora esistono due chiusi C_A e C_B di (X, \mathcal{T}) tali che $C_A \supseteq A, x \notin C_A$ e $C_B \supseteq B, x \notin C_B$.
Ne segue dunque che $C_A \cup C_B$ è un chiuso tale che $x \notin C_A \cup C_B \supseteq \overline{A \cup B}$; ma ciò contraddice il fatto che $x \in \overline{A \cup B}$.

4. Determinare opportuni intervalli A e B della retta euclidea \mathbb{R} in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

- (a) $\text{Fr}(A \cup B) \subsetneq \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$; $\text{Fr}(A \cap B) \not\subseteq \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$; $\text{Fr}(A \cap B) \not\supseteq \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$;
- (b) $\text{Int}(A \cup B) \supsetneq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$;
- (c) $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Soluzione:

- (a) • Scegliendo $A := [a, b]$ e $B := [b, c]$ con $a < b < c$ abbiamo che $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}([a, c]) = \{a, c\}$ mentre $\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B) = \{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$;
 • Siano $A := (a, b)$ e $B := (c, d)$ con $a < c < d < b \Rightarrow \text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(\emptyset) = \emptyset$ e $\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) = \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$;
 • Presi $A := (a, b)$ e $B := (b, c)$ con $a < b < c \Rightarrow \text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(\emptyset) = \emptyset$ mentre $\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) = \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$.
- (b) Prendiamo $A := (a, b]$ e $B := (b, c)$ con $a < b < c \Rightarrow$
 $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(a, c) = (a, c) \supsetneq (a, b) \cup (b, c) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$;
- (c) Si ponga $A := (a, b)$ e $B := (b, c)$ con $a < b < c \Rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = [a, b] \cap [b, c] = \{b\}$.

5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione così definita: $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Consideriamo le seguenti topologie su \mathbb{R} : $\varepsilon, i_d := \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$, j_d (la topologia che ha per base l'insieme $\mathcal{B}_d = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$). Verificare che:

- (a) $f : (\mathbb{R}, \varepsilon) \rightarrow (\mathbb{R}, \varepsilon)$ è continua;
 (b) $f : (\mathbb{R}, i_d) \rightarrow (\mathbb{R}, i_d)$ non è continua;
 (c) $f : (\mathbb{R}, j_d) \rightarrow (\mathbb{R}, j_d)$ non è continua.

Soluzione:

Un'applicazione $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ da uno spazio topologico in un altro, si dice continua se $\forall A \subseteq Y$ aperto rispetto a $\mathcal{T}_Y, f^{-1}(A)$ è aperto in X .

Osservazione: Siano X e Y spazi topologici e sia \mathcal{B} una base di Y . Allora un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è continua se e solo se $f^{-1}(U)$ è aperto in X per ogni $U \in \mathcal{B}$.

\Rightarrow : ovvio, essendo, per definizione di base, U aperto.

\Leftarrow : mostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto in X per ogni A aperto di Y .

Sia A un aperto di Y . Allora $A = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha, U_\alpha \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$
 è aperto e pertanto f è continua.

(a) Come osservato, possiamo limitarci a mostrare che la controimmagine di un qualsiasi aperto di una base di ε è aperta. Sappiamo che una base per $(\mathbb{R}, \varepsilon)$ è la famiglia degli intervalli aperti ovvero $\mathfrak{B} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Consideriamo, dunque, $D = (a, b)$ un qualsiasi intervallo aperto di \mathbb{R} . Si distinguono tre casi:

- se $b \leq 0$ allora $f^{-1}(D) = \emptyset \in \varepsilon$;
- se $a < 0 < b$ allora $f^{-1}(D) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \in \varepsilon$;
- se $a \geq 0$ allora $f^{-1}(D) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b}) \in \varepsilon$.

Segue la tesi.

(b) Per dimostrare che l'applicazione non è continua basterà trovare un aperto di (\mathbb{R}, i_d) la cui preimmagine non è aperta (\mathbb{R}, i_d) .

Consideriamo $A := (a, +\infty), 0 < a \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1}(A) = (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, +\infty) \notin i_d$.

(c) Sia $A := [1, 2) \in j_d$. Si ha:

$f^{-1}(A) = (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$. Mostriamo che $f^{-1}(A) \notin j_d$.

Supponiamo per assurdo che $(-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \in j_d \Rightarrow ((-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})) \cap (-\infty, 0] = (-\sqrt{2}, -1] \in j_d$ (essendo $(-\infty, 0] \in j_d$). Ma questo è assurdo.

6. (a) Costruire esplicitamente un omeomorfismo tra due segmenti chiusi e limitati X ed Y assegnati in \mathbb{R}^2 .
- (b) Assegnate le poligonalali di vertici rispettivamente $P_1(1, 3), P_2(3, 1), P_3(5, 1), P_4(5, 4)$ e $Q_1(0, 0), Q_2(3, 2), Q_3(5, 2), Q_4(3, 0)$, costruire un omeomorfismo tra $\prod(P_1, P_2, P_3, P_4)$ e $\prod(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.
- (c) Assegnate le poligonalali di vertici rispettivamente $P_1(1, 3), P_2(3, 1), P_3(5, 1)$ e $Q_1(0, 0), Q_2(3, 2), Q_3(5, 2), Q_4(3, 0)$, costruire un omeomorfismo tra $\prod(P_1, P_2, P_3)$ e $\prod(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.

Soluzione:

- (a) Siano X e Y due segmenti in \mathbb{R}^2 rispettivamente di estremi $P_1 = (a_1, b_1), P_2 = (a_2, b_2)$ e $Q_1 = (c_1, d_1)$ e $Q_2 = (c_2, d_2)$.

$$\text{Allora } X = \{(a_1(1-t) + a_2t, b_1(1-t) + b_2t) : t \in [0, 1]\} \text{ e}$$

$$Y = \{(c_1(1-t) + c_2t, d_1(1-t) + d_2t) : t \in [0, 1]\}.$$

Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita nel modo seguente:

$$f(x, y) = \left(c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x - a_1), d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(y - b_1) \right)$$

(ottenuta dall'applicazione generica $f(x, y) = (p+qx, r+sy)$ imponendo che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, 2$).

f è chiaramente continua. Inoltre osserviamo che $f(X) = Y$; infatti:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(\{(a_1(1-t) + a_2t, b_1(1-t) + b_2t) : t \in [0, 1]\}) = \\ &= \{(c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(a_1(1-t) + a_2t - a_1), d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(b_1(1-t) + b_2t - b_1)) : t \in [0, 1]\} = \\ &= \{(c_1(1-t) + c_2t, d_1(1-t) + d_2t) : t \in [0, 1]\} = Y \end{aligned}$$

Mostriamo dunque che $f|_X : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo:

- suriettività: abbiamo infatti visto che $f(X) = Y$;
- iniettività: supponiamo che esistano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tali che $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x_1 - a_1) = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x_2 - a_1) \\ d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(y_1 - b_1) = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(y_2 - b_1) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x_1 - a_1) = \frac{c_2 - c_1}{a_2 - a_1}(x_2 - a_1) \\ \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(y_1 - b_1) = \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}(y_2 - b_1) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 - a_1 = x_2 - a_1 \\ y_1 - b_1 = y_2 - b_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \end{aligned}$$

- continuità: $f|_X$ è restrizione dell'applicazione continua f ;
- continuità dell'inversa: si verifica facilmente che $f|_X^{-1} : Y \rightarrow X$ ha la forma seguente:

$$f|_X^{-1}(x, y) = \left(a_1 + \frac{a_2 - a_1}{c_2 - c_1}(x - c_1), b_1 + \frac{b_2 - b_1}{d_2 - d_1}(y - d_1) \right)$$

e pertanto è continua.

- (b) Siano X_1, X_2, X_3 i segmenti in \mathbb{R}^2 rispettivamente di estremi P_1 e P_2, P_2 e P_3, P_3 e P_4 e Y_1, Y_2, Y_3 i segmenti in \mathbb{R}^2 rispettivamente di estremi Q_1 e Q_2, Q_2 e Q_3, Q_3 e Q_4 .

Siano dunque $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, con $i = 1, 2, 3$ gli omeomorfismi costruiti come nel punto (a). Si ha: $f_i|_{X_i \cap X_{i+1}} = f_i|_{P_{i+1}} = f_{i+1}|_{P_{i+1}} = f_{i+1}|_{X_i \cap X_{i+1}}, \forall i \in \{1, 2\}$ (poichè $f_i(P_{i+1}) = Q_{i+1} = f_{i+1}(P_{i+1})$).

E' allora possibile definire l'incollamento delle applicazioni $\{f_1, f_2, f_3\}$ come l'applicazione $f : \prod(P_1, P_2, P_3, P_4) \rightarrow \prod(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ data da:

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{se } x \in X_i$$

f risulterà inoltre un'omeomorfismo in quanto incollamento di omeomorfismi.

- (c) Si procede analogamente al punto (b), suddividendo ad esempio il segmento di estremi P_2, P_3 in due segmenti (si può scegliere $P_4 = (4, 1) \in \overline{P_2P_3}$) e denotando con X_1, X_2, X_3 rispettivamente i segmenti di estremi P_1 e P_2, P_2 e P_4, P_4 e P_3 .

7. Dimostrare che le topologie j_d e j_s su \mathbb{R} sono omeomorfe.

Soluzione:

Per definizione le topologie j_d e j_s su \mathbb{R} sono omeomorfe se e solo se gli spazi topologici (\mathbb{R}, j_d) e (\mathbb{R}, j_s) sono omeomorfi.

Condideriamo l'applicazione $f : (\mathbb{R}, j_s) \rightarrow (\mathbb{R}, j_d)$ tale che $f(x) = -x \forall x \in \mathbb{R}$. f è chiaramente biunivoca ($f^{-1} = f$). Per mostrare che f è un omeomorfismo facciamo vedere che essa è continua e aperta.

- f è continua:

Come osservato nell'esercizio 5 possiamo limitarci agli aperti della base.

Sia dunque $U = [a, b) \in j_d$ un aperto della base; allora $f^{-1}(U) = (-b, -a] \in j_s$.

- f è aperta:

Anche in questo caso possiamo limitarci agli aperti della base \mathcal{B}_s ; infatti supponendo che $f(V)$ è aperto per ogni aperto $UV \in \mathcal{B}_s$, preso A aperto in X si ha:

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha, V_\alpha \in \mathcal{B}_s \Rightarrow f(A) = f\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(V_\alpha) \text{ è aperto. Ne segue } f \text{ è aperta.}$$

Nel nostro caso, scelto $V = (a, b] \in j_s$, si ha: $f(V) = [-b, -a) \in j_d$, da cui la tesi.

8. Dimostrare che se X è un insieme infinito con la topologia cofinita ogni aperto non vuoto è denso.

Soluzione:

Per assurdo, supponiamo che esista un aperto $A \subsetneq X$, $A \neq \emptyset$ tale che $\overline{A} = C \subsetneq X$.

Allora, dalla definizione di topologia cofinita, essendo C un chiuso proprio di X , segue che $C = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \in X \forall i = 1, \dots, n$. Inoltre, poichè A è un aperto non vuoto, $A = X \setminus \{y_1, \dots, y_m\}$, $y_j \in X \forall j = 1, \dots, m$; in particolare A è infinito (poichè X è infinito per ipotesi).

Ciò contraddice il fatto che $A \subseteq C \subsetneq X$, in quanto un insieme infinito non può essere contenuto in un insieme finito.

9. Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico separabile. Siano \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' due topologie su X tali che $\mathcal{T}' < \mathcal{T} < \mathcal{T}''$.

(a) Dimostrare che (X, \mathcal{T}') è separabile;

(b) Verificare con un esempio (X, \mathcal{T}'') può non essere separabile.

Soluzione:

Ricordiamo che uno spazio topologico X è separabile se ammette un sottoinsieme denso e numerabile.

(a) Sia S un sottoinsieme numerabile di X denso rispetto a \mathcal{T} . Denotando con \overline{S} e \overline{S}' le chiusure di S rispettivamente in \mathcal{T} e in \mathcal{T}' , si ha $\overline{S} = X$. E' dunque sufficiente dimostrare che $\overline{S} \subseteq \overline{S}'$.

Indichiamo con \mathfrak{C} la famiglia dei chiusi di (X, \mathcal{T}) e con \mathfrak{C}' quella di (X, \mathcal{T}') . Poiché \mathcal{T}' è meno fine di \mathcal{T} si avrà che $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C} \Rightarrow \{C' \in \mathfrak{C}' : S \subseteq C'\} \subseteq \{C \in \mathfrak{C} : S \subseteq C\} \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{S}'$.

(b) Siano $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \varepsilon$ e $\mathcal{T}'' = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Sappiamo che \mathbb{Q} è un sottoinsieme denso e numerabile rispetto alla topologia euclidea ($\mathbb{Q} = \mathbb{R}$), da cui discende la separabilità di $(\mathbb{R}, \varepsilon)$. Invece, $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ non è separabile poiché, essendo in \mathcal{T}'' tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R} chiusi, l'unico sottoinsieme denso è \mathbb{R} , il quale non è chiaramente numerabile.

10. Siano (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) due spazi topologici metrizzabili. Se X ed Y sono insiemi con almeno due elementi, verificare che $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$ non è una topologia su $X \times Y$.

Soluzione:

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$ sia una topologia su $X \times Y$.

Siano d_1 e d_2 le distanze associate, rispettivamente, a \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 . Presi $x_1, x_2 \in X$ distinti, esistono due dischi disgiunti D_1^X e D_2^X rispettivamente di centri x_1 e x_2 (basta considerare, per entrambi, un raggio $r \leq \frac{1}{2}d_1(x_1, x_2)$).

Allo stesso modo prendiamo $y_1, y_2 \in Y$ e i dischi disgiunti D_1^Y e D_2^Y rispettivamente di centri y_1 e y_2 .

Ora siano $D_1 := D_1^X \times D_1^Y$ e $D_2 := D_2^X \times D_2^Y$ i quali, ovviamente, appartengono a $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 := \{A_X \times A_Y : A_X \in \mathcal{T}_1, A_Y \in \mathcal{T}_2\}$.

Allora, nell'ipotesi che $\mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$ sia una topologia, $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2$, ovvero $\exists U \in \mathcal{T}_1$ e $V \in \mathcal{T}_2$ tali che $D_1 \cup D_2 = U \times V$.

Il punto $(x_1, y_1) \in D_1 \subseteq U \times V$ ed, analogamente, $(x_2, y_2) \in D_2 \subseteq U \times V \Rightarrow x_1, x_2 \in U$ e $y_1, y_2 \in V$.

Ma, allora, $(x_1, y_2) \in U \times V = D_1 \cup D_2$ mentre $(x_1, y_2) \notin D_1$ (perché $y_2 \notin D_1^Y$) e $(x_1, y_2) \notin D_2$ (poiché $x_1 \notin D_2^X$): assurdo.

11. Dimostrare che lo spazio topologico euclideo $(\mathbb{R}^2, \varepsilon)$ verifica il 2° assioma di numerabilità, provando che l'insieme (numerabile) di dischi euclidei $\mathfrak{D} := \{D_h(q), \forall q \in \mathbb{Q}^2, h \in \mathbb{Q}, h > 0\}$ è una base di ε .

Soluzione:

Per dimostrare l'asserto basterà verificare che $\forall D_r(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^2, 0 < r \in \mathbb{R}$ e $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$D_r(\bar{x}) = \bigcup_{0 < k \in \mathbb{Q}} D_k(\bar{q}), \quad \bar{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2.$$

o equivalentemente che $\forall \bar{y} \in D_r(\bar{x})$ esistono $\bar{q} \in \mathbb{Q}^2, h \in \mathbb{Q}, h > 0$ tali che $\bar{y} \in D_h(\bar{q}) \subseteq D_r(\bar{x})$. Sia $\bar{y} \in D_r(\bar{x})$; sappiamo che $\exists D_\delta(\bar{y})$ tale che $D_\delta(\bar{y}) \subseteq D_r(\bar{x})$. Prendiamo ora $\{\bar{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^2$ tale che $\bar{q}_n \rightarrow \bar{y}$ (posso farlo poiché \mathbb{Q}^2 è denso in \mathbb{R}^2).

Poiché $\{\bar{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad \bar{y} , $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $d(\bar{q}_N, \bar{y}) < \frac{\delta}{3}$.

Scegliamo quindi $k \in \mathbb{Q}$ tale che $\frac{\delta}{3} < k < \frac{2\delta}{3}$; in questo modo $\bar{y} \in D_k(\bar{q}_N) \subseteq D_\delta(\bar{y})$.

Infatti: se $\bar{z} \in D_\delta(\bar{y}) \Rightarrow d(\bar{z}, \bar{y}) \leq d(\bar{z}, \bar{q}_N) + d(\bar{q}_N, \bar{y}) < k + \frac{\delta}{3} < \frac{2\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$.