Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Tutorato 8 (10 Dicembre 2010)
Coniche e proiettività

1. Siano V uno spazio vettoriale euclideo e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ una sua base ortonormale. Si consideri l'operatore lineare $f : V \to V$ così definito:

$$f(\vec{i}) = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \qquad f(\vec{j}) = 2(\vec{i} + \vec{k}), \qquad f(\vec{k}) = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

   (a) Si verifichi che f è autoggiunto e si determini una base ortonormale diagonalizzante di autovettori di f.

   (b) Sia $I \subseteq V$ il sottoinsieme dei vettori $\vec{v} \in V$ tali che $\vec{v}$ e $f(\vec{v})$ hanno la stessa lunghezza. Si dica, motivando la risposta, se I contiene dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di V.

2. (a) In $\mathcal{P}^2{}_{\mathbb{R}}$ sia la retta r di equazione omogenea $3X_0 + X_1 - 2X_2 = 0$. Determinare equazioni parametriche per r.

   (b) Determinare equazioni parametriche e omogenee per la retta s passante per i punti $S[-1, 1, -2]$ e $T[2, -3, 2]$.

   (c) Determinare l'intersezione tra le rette r e s definite nei punti precedenti.

3. **Fascio di rette passante per un punto**
   Determinare una equazione omogenea per ogni retta di $\mathcal{P}^2{}_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $D[3, -1, 5]$.

4. In $\mathcal{P}^2{}_{\mathbb{C}}$, siano assegnati i punti $A[1, 1, 0], B[1, 2, 1], C[1, -1, -1], D[1, 0, 1]$:

   (a) Mostrare che i punti A,B, C, D sono in posizione generale.

   (b) Determinare le equazioni della proiettività $\varphi : \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\varphi([1, 0, 0]) = A$, $\varphi([0, 1, 0]) = B$, $\varphi([0, 0, 1]) = C$, $\varphi([1, 1, 1]) = D$.

5. Sia assegnata in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la famiglia di coniche

$$C_\lambda : \lambda X_0^2 - 2\lambda X_1 X_2 + X_1^2 = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

   (a) Verificare che C_λ è una conica generale $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

   (b) Determinare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali C_λ è una conica generale a punti reali.

6. Determinare, in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, le equazioni di tutte le iperboli affini non degeneri, aventi centro $C = (1, 0)$ e punti impropri $[0, 1, 2]$ e $[0, 1, -1]$.

7. Sia $\mathbb{A}$ un piano affine reale con riferimento $O_{\vec{i},\vec{j}}$.
Passando al suo completamento proiettivo $\overline{\Gamma}$ in $\mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ si determinino gli eventuali punti all'infinito della conica $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$, di equazione:

$$X^2 - 32Y^2 - 4XY - X - Y = 0$$

Si determini una proiettività $p : \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $\overline{\Gamma} = p(\overline{\Pi})$, dove $\Pi = \overline{\Pi} \cap \mathbb{A}$ è la parabola di equazione $Y - X^2$.
(Seconda Prova di Esonero del 17 dicembre 2009)