Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Tutorato 7 (3 Dicembre 2010)
Coniche

1. Fissati i punti $P_1 = (0,0), P_2 = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$, si scriva l'equazione
$$d(P,P_1)^2 - td(P,P_2)^2 = 0,$$
ove P è il punto generale di cooridinate (x,y), $d(-,-)$ indica la distanza tra i punti e $t \in \mathbb{R}$.
   - (a) Verificare che per $t \neq 1$ essa rappresenta l'equazione di una conica affine. Per $t \neq 1$, dire quali sono le coniche degeneri.
   - (b) Per $t = 2$, si scriva l'equazione della conica corrispondente e l'equazione della sua trasformata rispetto alla riflessione attorno all'asse $x + y = 0$.

   (Appello A del 29-01-2010)

2. Nel piano euclideo $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ si considerino la famiglia di coniche di equazione
$$\mathcal{F} : x^2 + y^2 + txy - tx - 3x + y = 0, t \in \mathbb{R}$$
e la retta $\mathcal{R}$ di equazione $x + y - 1 = 0$.
   - (a) Si dimostri che la retta $\mathcal{R}$ è asse di simmetria di tutte le coniche della famiglia.
   - (b) Si determinino le coniche degeneri della famiglia $\mathcal{F}$.
   - (c) Fra le coniche della famiglia $\mathcal{F}$, si dimostri che ne esiste una e una sola passante per $C = (2,-1)$ e se ne determinino le equazioni in forma cartesiana e in forma canonica.

   (Appello B del 18-02-2010)

3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si consideri la conica Γ_t di equazione
$$t^2x^2 + t^2y^2 - 2txy + 2(1+t)x - 3 = 0$$
   - (a) Si determinino le coordinate del centro C_t di Γ_t al variare di t e si scriva l'equazione cartesiana della conica $\mathcal{C}$ su cui giacciono i punti dell'insieme $I = \{C_t, t \in \mathbb{R}\}$.
   - (b) Si studi la conica $\mathcal{C}$ determinando il tipo, se è degenere o non degenere, gli eventuali centro ed assi.
   - (c) Si determinino le equazioni di una affinità che trasforma $\mathcal{C}$ in una iperbole equilatera di centro l'origine.

4. Assegnata la parabola euclidea $\mathcal{C}$ di equazione:
$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0,$$
determinare l'asse e il vertice.
(*Suggerimento*: l'asse della parabola ha direzione parallela all'autovettore associato all'autovalore 0 della matrice A_{00}.)

5. Studiare la riducibilità in $\mathbb{R}[x,y]$ e $\mathbb{C}[x,y]$ dei seguenti polinomi:
   - (a) $-2x^2 - 4y^2 + 3xy + 4x - 1$;
   - (b) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 9$;
   - (c) $2x^2 - 3y^2 + 5xy - 7x + 7y - 4$.